TÉCNICA DEL CORDÓN DE ZAPATOS (SHOELACE)

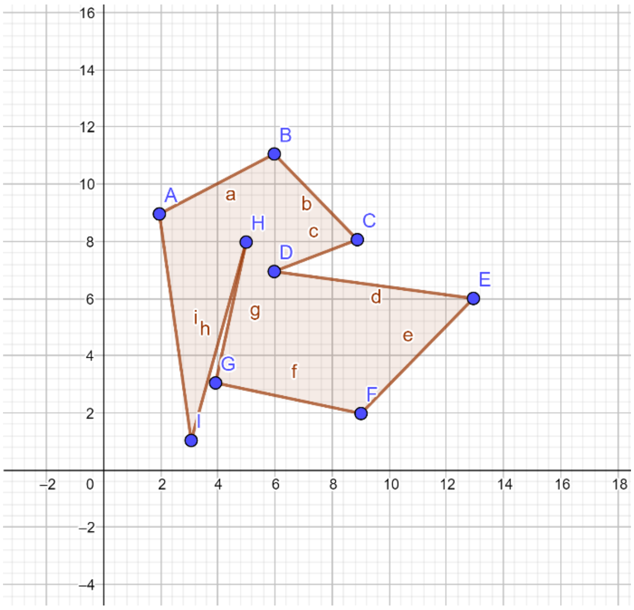
2014 www.jamestanton.com y www.gdaymath.com

James Tanton

Traducción y adaptación: ***Adriana Rabino***

CÓMPUTO DE ÁREAS

Aquí hay un eneágono cuyos vértices son (2,9), (6,11), (9,8), (6,7), (13, 6), (9,2), (4,3), (5,8) y (3,1). ¿Cuál es su área?



El matemático y físico alemán Carl Friedrich Gauss (1777-1855) descubrió, entre muchos logros asombrosos y profundos a lo largo de su vida, un procedimiento maravilloso para calcular el área de un polígono en el plano de coordenadas utilizando solo las coordenadas de sus vértices. Para nuestro eneágono anterior, el algoritmo procede de la siguiente manera:

Muévase alrededor del perímetro del polígono en una misma dirección y enumere en una columna las coordenadas de los vértices encontrados. Esto formará dos columnas individuales de números: una de las coordenadas ***x*** *de los vértices encontrados y otra con las coordenadas* ***y*** *correspondientes:*

2	9
6	11
9	8
6	7
13	6
9	2
4	3

5 8

3 1

Multiplique los pares (abscisas y ordenadas) a lo largo de las diagonales sureste ("envolviendo" los extremos como se muestra en la imagen) y sume (llame a esto Suma 1). Haga esto nuevamente para las diagonales suroeste para obtener Suma 2. ***¡La mitad de la diferencia de estas dos sumas es el área del polígono!***

Suma 1		Suma 2	
2			9
6	11	6	11
9	8	9	8
6	7	6	7
13	6	13	6
9	2	9	2
4	3	4	3
5	8	5	8
3	1	3	1
	9	2	

Suma 1: 2 x 11 + 6 x 8 + 9 x 7 + 6 x 6 + 13 x 2 + 9 x 3 + 4 x 8 + 5 x 1 + 3 x 9 = **286**

Suma 2: 9 x 6 + 11 x 9 + 8 x 6 + 7 x 13 + 6 x 9 + 2 x 4 + 3 x 5 + 8 x 3 + 1 x 2 = **395**

Diferencia positiva: **395 – 286 = 109**

Área = ½ . 109 = 54,5

La fórmula general que resulta de este procedimiento se conoce como **fórmula del área del cordón de los zapatos de Gauss.** ¿Puedes ver por qué se le da este nombre? Quizás superponiendo los dos diagramas anteriores…

Generalización: Sea un polígono de n lados (si no está apoyado sobre un eje se puede trasladar a él sin que se altere su área). Se construyen trapecios tal como muestra la figura 1. Se suman todas las áreas de esos trapecios y se les restan las áreas de los trapecios, tal como muestra en la figura 2.

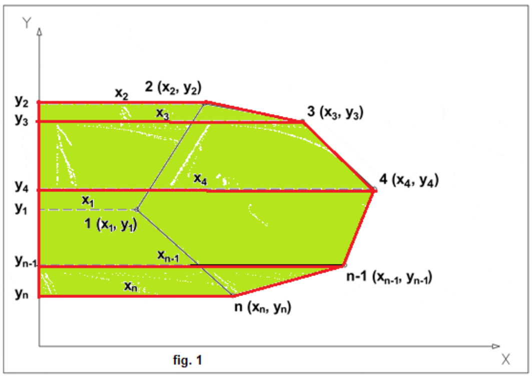


Figura 1

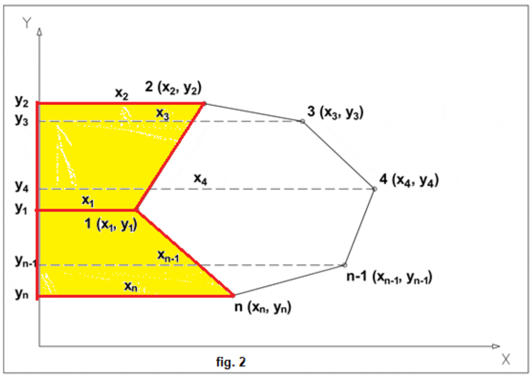


Figura 2

$A = [(x_3 + x_2) \,.\, (y_2 - y_3) + (x_4 + x_3) \,.\, (y_3 - y_4) + (x_5 + x_4) \,.\, (y_4 - y_5) + \ldots + (x_n + x_{n-1}) \,.\, (y_{n-1} - y_n)] - [(x_1 + x_2) \,.\, (y_2 - y_1) + (x_n + x_1) \,.\, (y_1 - y_n)]/2$

Desarrollando todos los productos obtenemos:

$(x_3y_2 - x_3y_3 + x_2y_2 - x_2y_3 + x_4y_3 + x_3y_3 - x_4y_4 - x_3y_4 + x_5y_4 - x_5y_5 + x_4y_4 - x_4y_5 + \ldots . - x_1y_2 + x_1y_1 - x_2y_2 + + x_2y_1 - x_6y_1 + x_6y_6 - x_1y_1 + x_1y_6 - x_5y_6 + x_5y_5 - x_6y_6 + x_6y_5 \ldots) / 2$

Cancelando los términos opuestos nos queda la fórmula del cordón de zapatos (tomando el sentido contrario a las agujas del reloj).

En general, factorizando convenientemente, se puede expresar el área:

$$2A = \sum_{i=1}^{n} [x_i \cdot (y_{i-1} - y_{i+1})]$$

donde

- **A** es el área del polígono,
- **n** es el número de lados (o vértices) del polígono,
- **x_i , y_i , i = 1, 2, ..., n** son las coordenadas cartesianas de los vértices del polígono, y
- **+1** o -1 definen el vértice **anterior** o **siguiente** desde el vértice i.

Si los vértices se numeran en el sentido de las agujas del reloj, los determinantes de las expresiones anteriores son positivos, mientras que si se numeran en el sentido contrario a las agujas del reloj, son negativos, en cuyo caso se deben considerar los valores absolutos.

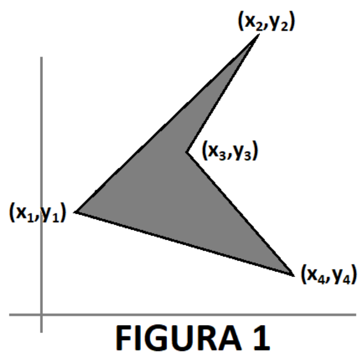


FIGURA 1

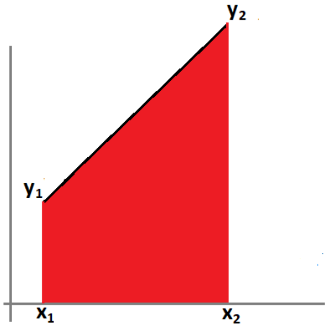


FIGURA 2

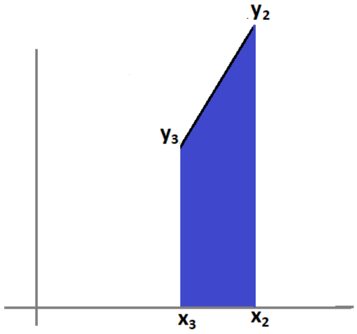


FIGURA 3

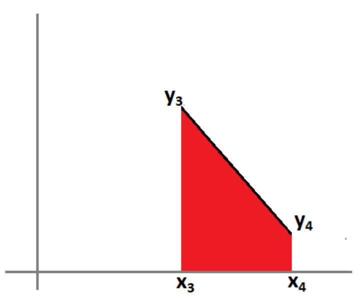


FIGURA 4

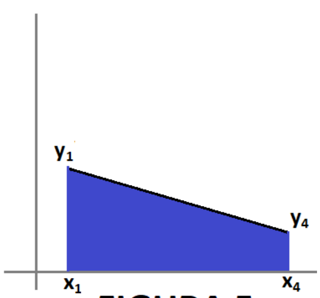


FIGURA 5

Queremos conocer la superficie de la figura 1 en base a las coordenadas de sus vértices. Observamos que esa superficie es igual a la suma de las áreas de los trapecios de las figuras 2 y 4 menos las áreas de los trapecios de las figuras 3 y 5 (Se puede trabajar con papel de calcar para visualizar mejor. Tener en cuenta las áreas que se superponen por consiguiente, al restar las áreas, observar cuántas veces se restan las superpuestas):

ÁREA TRAP.FIG.1 = ÁREA TRAP.FIG. 2 - ÁREA TRAP.FIG. 3 + ÁREA TRAP.FIG. 4 - ÁREA TRAP.FIG. 5

Área trapecio figura 2 = $(1/2)\ (y_2 + y_1)\ (x_2 - x_1)$

Área trapecio figura 3 = $(1/2)\ (y_3 + y_2)\ (x_2 - x_3)$

Área trapecio figura 4 = $(1/2)\ (y_4 + y_3)\ (x_4 - x_3)$

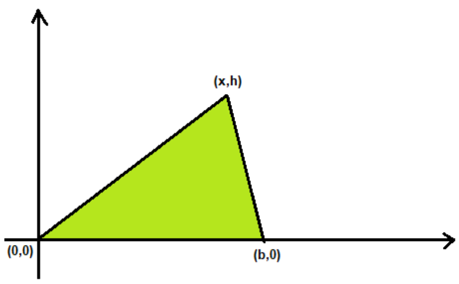
Área trapecio figura 5 = $(1/2)\ (y_1 + y_4)\ (x_4 - x_1)$

Así calculado las áreas de los trapecios 3 y 5 resultan automáticamente negativas ya que $x_3 - x_2 < 0$ y también $x_1 - x_4 < 0$.

(En esta demostración se debe elegir el sentido contrario a las agujas del reloj para que el desarrollo de los productos coincida (con su signo) con la fórmula del cordón de zapatos.)

Si hacemos todos los desarrollos para calcular las áreas veremos que los resultados coinciden exactamente con el postulado de los cordones de las zapatillas **que se puede generalizar inmediatamente a un polígono de cualquier cantidad de lados.**

EJEMPLO 1: Un triángulo con base b y altura h puede situarse en el plano de coordenadas de la siguiente manera:



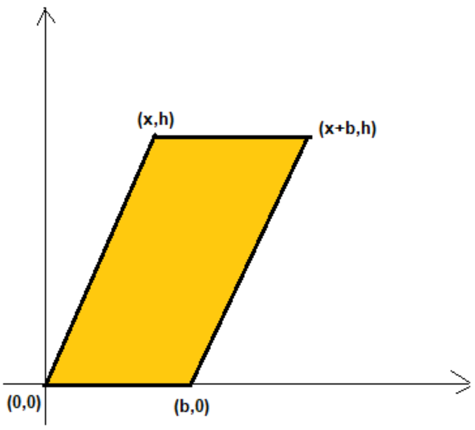
De acuerdo a la fórmula de shoelaces:

Suma 1: 0 + bh + 0 = bh

Suma 2: 0 + 0 + 0 = 0

Área: ½ (bh – 0) = ½ bh!

EJEMPLO 2: un paralelogramo cuya base tiene longitud b y altura h se puede ubicar en un plano de coordenadas cartesianas de la siguiente manera:



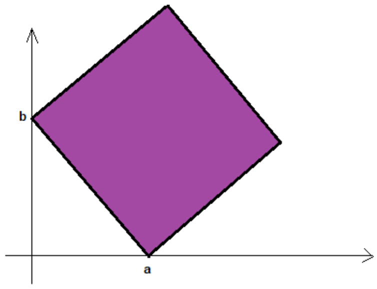
De acuerdo a la fórmula del cordón de zapatos:

Suma 1: 0 + bh + (x+b)h + 0= 2bh + xh

Suma 2: 0 + 0 + xh + 0 = xh

Área: ½ (2bh + xh – xh) = bh, lo cual es correcto!

PROBLEMA
Un cuadrado cuyo lado mide c (por lo tanto su área es c^2) se sitúa en la esquina del primer cuadrante, tal como se ve en la figura, tocando el eje x en la posición a y el eje y en la posición b.



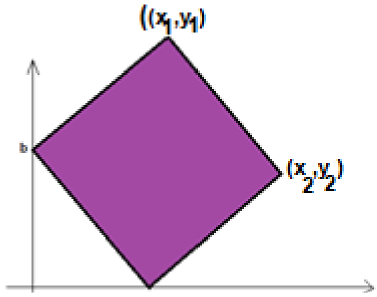
¿Qué resultado brinda la fórmula del cordón de zapatos para hallar el área de este cuadrado? ¿Y las coordenadas de los otros vértices?

Posible solución:
El lado del cuadrado mide $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, por lo tanto su área es $c^2 = a^2 + b^2$.

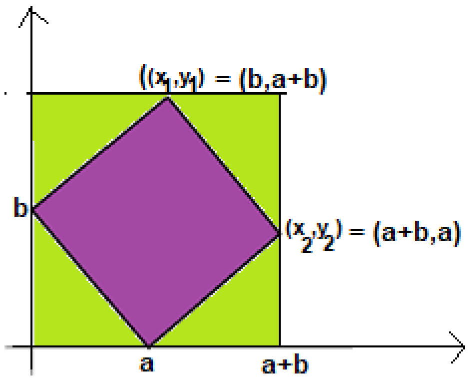
Si los vértices del cuadrado son: $(a,0)$, (x_2, y_2), (x_1, y_1), $(0,b)$, atendiendo a la fórmula del cordón de zapatos se tiene que $A = a^2 + b^2 = (a.y_2 + x_2.y_1 + x_1.b + 0.0 - 0.x_2 - y_2.x_1 - y_1.0 - b.a)/2 \Rightarrow a^2 + b^2 = (a.y_2 + x_2y_1 + x_1.b - y_2.x_1 - b.a)/2$

$\Rightarrow 2a^2 + 2b^2 = a(y_2 - b) + x_1(b - y_2) + x_2y_1$

$\Rightarrow 2a^2 + 2b^2 = (y_2 - b).(a - x_1) - x_2y_1$



Si circunscribimos un cuadrado que pase por los vértices del cuadrado anterior, se podrá verificar que $(x_1,y_1) = (b,a+b)$ y $(x_2,y_2) = (a+b,a)$, porque los cuatro triángulos rectángulos de las esquinas son congruentes.

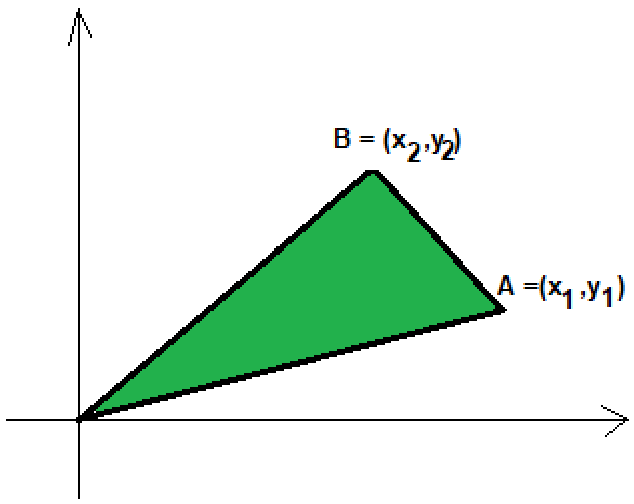


Entonces se cumple que:
$2a^2 + 2b^2 = (y_2 - b).(a - x_1) - x_2y_1$
O sea:
$2a^2 + 2b^2 = (a - b).(a - b) + (a+b).(a+b)$

El objetivo de este ensayo es para establecer por qué este algoritmo encantador de cordón de zapatos funciona.

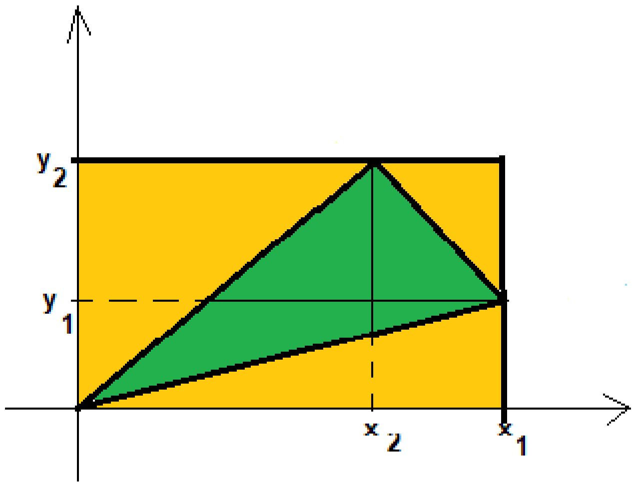
PASO 1: TRIÁNGULOS BIEN SITUADOS

Considerar un triángulo con un vértice en el origen o = (0,0). Supongamos que los dos vértices restantes son $A = (x_1, y_1)$ y $B = (x_2, y_2)$. ¿Cuál es el área del triángulo?



Una forma eficiente para calcular esta área es envolver el triángulo en un rectángulo y restar del área del rectángulo las áreas de los tres triángulos rectángulos.

Área: $x_1y_2 – ½\ x_1y_1 - ½\ x_2y_2 – ½\ (x_1 – x_2)\ .\ (y_2 – y_1) =$



$= ½\ (2x_1y_2 – x_1y_1 – x_2y_2 – x_1y_2 + x_2y_2 + x_1y_1 – x_2y_1)= ½\ (x_1y_2 – x_2y_1)$

Esta es la fórmula del cordón de zapatos aplicada a tres puntos coordenados:

0 0 X_1 y_1 X_2 y_2	0 0 X_1 y_1 X_2 y_2 0

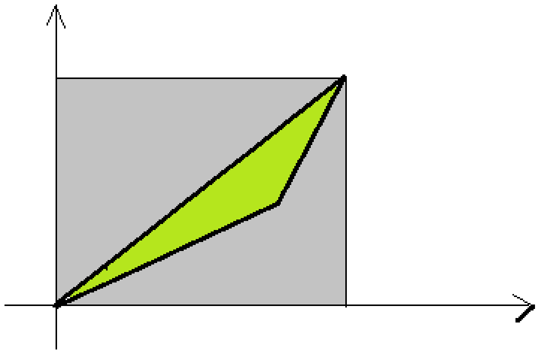
Suma 1: $0 + x_1y_2 + 0$

Suma 2: $0 + y_1x_2 + 0$

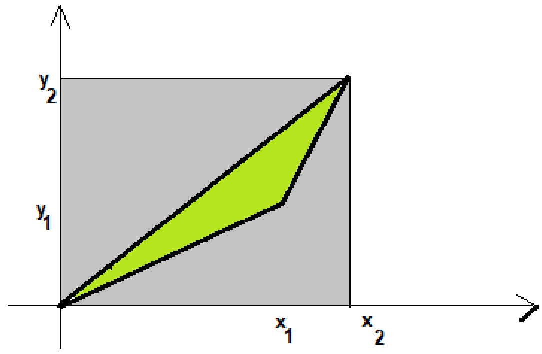
Área = $½\ (x_1y_2 – x_2y_1)$

Entonces la fórmula del cordón de zapatos coincide con el área de los triángulos en este caso.

Pero el diagrama que dibujamos anteriormente no representa todas las situaciones en que se pueden ubicar los vértices de un triángulo. Considerar, por ejemplo, tres vértices situados de la siguiente manera:



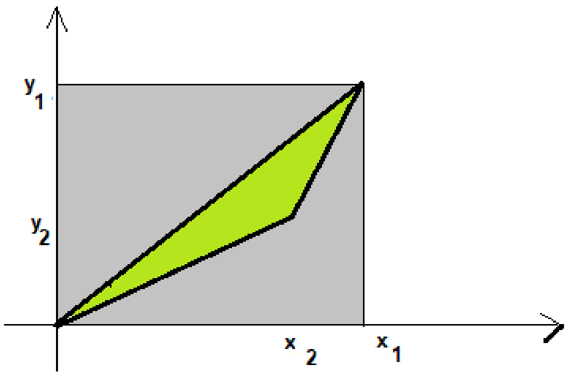
Si rotulamos los vértices de esta manera:



El área del triángulo es A = ½ ($x_1y_2 - x_2y_1$)

¡Verificar esto! Restar las áreas de los tres triángulos rectángulos y un rectángulo menor.

Si en cambio, rotulamos los vértices de esta otra manera:



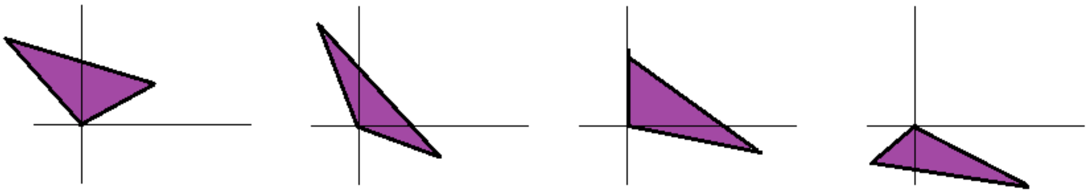
El área del triángulo está dada por:

A = ½ ($x_2y_1 - x_1y_2$)

Estas dos formas difieren por un signo menos (son opuestas).

De cualquier forma, ambas coinciden con la mitad de la diferencia entre las dos sumas de cordón de zapatos, ya sea ½ (suma 1 – suma 2) o ½ (suma 2 – suma1).

PROBLEMA
Para un ejercicio tedioso…
Verificar (o argumentar lógicamente) que una de las fórmulas de cordón de zapatos, sea ½ (suma 1 – suma 2) o ½ (suma 2 – suma1) coincide con el área del triángulo, no importa en qué cuadrante esté, o sobre qué eje están los dos vértices que no apoyan en el origen. ¡Chequear todos los casos posibles!



Solución:
No importa en qué cuadrante estén los vértices. La fórmula siempre va a dar A = ½ $(x_2y_1 - x_1y_2)$ o ½ $(x_1y_2 - x_2y_1)$. Probar poniéndole signos positivos o negativos a las componentes de las coordenadas de los 2 puntos que no están en el origen, haciendo todas las combinaciones posibles.

Considerar un triángulos cuyas coordenadas son A $=(x_1,y_1)$, B $= (x_2,y_2)$, C $= (x_3,y_3)$. ¿Cuál es su área?

Traslademos el triángulo de tal manera que una de sus coordenadas coincide con el origen. Esto no va a cambiar el área del triángulo. Específicamente, hagamos que la traslación haga coincidir el vértice C con el origen. El triángulo trasladado tiene vértices: C´= (0,0),

A´= $(x_1 - x_3 , y_1 - y_3)$, B´= $(x_2 - x_3 , y_2 - y_3)$

Entonces

Suma 1 = $(x_1 - x_3)(y_2 - y_3)$

Suma 2 = $(x_2 - x_3)(y_1 - y_3)$

De acuerdo al paso 1 el área del triángulo es la mitad de la diferencia de las 2 sumas (suma 2 – suma 1):

$$\tfrac{1}{2}[(x_1 - x_3)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_1 - y_3)] = \tfrac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - y_1x_2 - y_2x_3 - y_3x_1)$$

Que es la fórmula del cordón de zapatos), comprendiendo que puede haber una diferencia de un signo menos (tal vez la diferencia positiva proviene, en cambio, de sustraer la suma 1 de la 2).

PASO 3: SIENDO CLAROS EN LOS MOVIMIENTOS

Sabemos que el área de un triángulo no varía al aplicarle un movimiento rígido. Si la fórmula del cordón de zapatos sirve para comprobar el área de triángulos, ¡la fórmula debería ser invariante bajo movimientos rígidos también! (asumimos que este es el caso para la traslación en el paso 2.)

PROBLEMA
Supongamos que un triángulo cuyos vértices son: A = (x_1,y_1) , B = (x_2,y_2) , C = (x_3,y_3)
Se traslada a otro triángulo cuyos vértices son: A´= $(x_1\text{-}c,y_1\text{-}d)$, B´= $(x_2\text{-}c,y_2\text{-}d)$, C´= $(x_3\text{-}c,y_3\text{-}d)$
Verificar que ½ (suma 1 – suma 2) es igual para ambos triángulos, o sea que tienen la misma área.

Solución:

Para el triángulo ABC
½ (suma 1 – suma 2) = **½ $(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 – x_2y_1 – x_3y_2 – x_1y_3)$**
Para el triángulo A´B´C´ = ½ $[(x_1 – c)(y_2 – d) + (x_2 – c)(y_3 – d) + (x_3 – c)(y_1 – d) – (x_2 – c)(y_1 – d) –$
$-(x_3 – c)(y_2 – d) – (x_1 – c)(y_3 – d) = ½ (x_1y_2 – x_1d – cy_2 + cd + x_2y_3 – x_2d – cy_3 + cd + x_3y_1 – x_3d –$
$-cy_1 + cd – x_2y_1 + x_2d + cy_1 – cd – x_3y_2 + x_3d + cy_2 – cd – x_1y_3 + x_1d + cy_3 – cd) =$
½ $(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 – x_2y_1 – x_3y_2 – x_1y_3)$

PROBLEMA
Una rotación en el sentido de las agujas del reloj con centro en el origen y un ángulo lleva un punto (x,y) a:
$(x\cos\vartheta – y\,\mathrm{sen}\vartheta,\ x\,\mathrm{sen}\vartheta + y\cos\vartheta)$
Supongamos un triángulo $A = (x_1,y_1)$, $B = (x_2,y_2)$, $C = (x_3, y_3)$
Se rota en un triángulo con vértices
$A´= (x_1\cos\vartheta – y_1\,\mathrm{sen}\vartheta,\ x_1\,\mathrm{sen}\vartheta + y_1\cos\vartheta)$
$B´= (x_2\cos\vartheta – y_2\,\mathrm{sen}\vartheta,\ x_2\,\mathrm{sen}\vartheta + y_2\cos\vartheta)$
$C´= (x_3\cos\vartheta – y_3\,\mathrm{sen}\vartheta,\ x_3\,\mathrm{sen}\vartheta + y_3\cos\vartheta)$
Verificar que ½ (suma1 – suma 2) es la misma para ambos triángulos.

Solución:
Para ABC: ½ (suma 1 – suma 2) = $(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 – y_1x_2 – y_2x_3 – y_3x_1)$
Para A´B´C´:
Utilizando identidades trigonométricas y haciendo un simple reemplazo de $\mathrm{sen}^2\theta$ por
$(1-\cos^2\theta)$, o viceversa, se anulan todas las expresiones opuestas y se llega al mismo resultado.

Ejecutando la combinación de una traslación, una rotación alrededor del origen, y con otra traslación, se sigue que la fórmula ½ (suma 1 – suma 2) no cambia cualquiera sea la rotación.

Desafío
¿Cómo queda la fórmula ½ (suma 1 – suma 2) si el triángulo es afectado por una reflexión?

PASO 4: SIENDO CLAROS CON LOS SIGNOS

La fórmula del cordón de zapatos también es invariante bajo otro tipo de acciones.

PROBLEMA
Suponer un triángulo $A = (x_1,y_1)$, $B = (x_2,y_2)$, $C = (x_3,y_3)$
Hay 6 maneras distintas de ordenar los vértices de este triángulo.
Verificar que en estas 3 ordenaciones:

x_1 y_1	X_3 y_3	X_2 y_2
X_2 y_2	X_1 y_1	X_3 y_3
X_3 y_3	X_2 y_2	X_1 y_1

el valor de la fórmula ½ (suma 1 – suma 2) es el mismo, y para las siguientes ordenaciones:

X_3 y_3	X_1 y_1	X_2 y_2
X_2 y_2	X_3 y_3	X_1 y_1

X_1 y_1	X_2 y_2	X_3 y_3

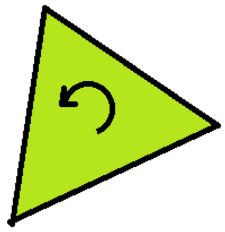
½ (suma 1 – suma 2) adopta el valor pero con signos opuestos.

El problema anterior muestra que si uno elige un sentido coherente alrededor del triángulo, ya sea en el sentido de las agujas del reloj (con área siempre a tu derecha) o contrario a las agujas del reloj (con el área siempre al a izquierda) la fórmula del cordón de zapatos

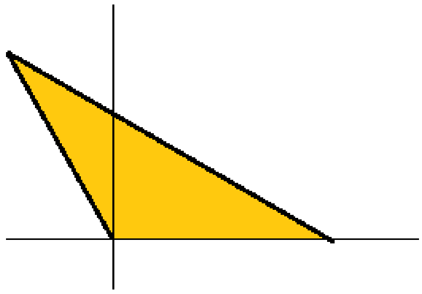
½ (suma 1 – suma 2) es independiente del vértice por donde se inicie. También sabemos que ½ (suma1 – suma 2) representa el área del triángulo (si este valor resulta ser un número positivo) o es el negativo de la misma (SEGÚN EL SENTIDO QUE SE ELIJA. PODRÍAMOS DECIR ENTONCES QUE EL ÁREA ES EL VALOR ABSOLUTO DE ESE RESULTADO). Sería bueno saber en qué sentido recorremos los triángulos para estar seguros de obtener el área positiva.

RESULTADO

Si uno recorre el triángulo en sentido contrario a las agujas del reloj, entonces ½ (suma1 – suma2) es positivo y es el área del triángulo.



Razón: Podemos trasladar el triángulo para que ese vértice se encuentra en el origen. (Esto no afecta ni al área del triángulo, ni el valor de ½ (suma 1 – suma 2), ni ninguna orientación del triángulo elegida). Realizando una rotación sobre el origen podemos colocar el triángulo de tal manera que uno de sus lados encuentre sobre el eje x positivo, de modo que el triángulo se encuentra en el semiplano superior. Esta rotación tampoco afecta al área del triángulo, ni el valor de ½ (suma 1 – suma 2), ni ninguna elección de orientación.

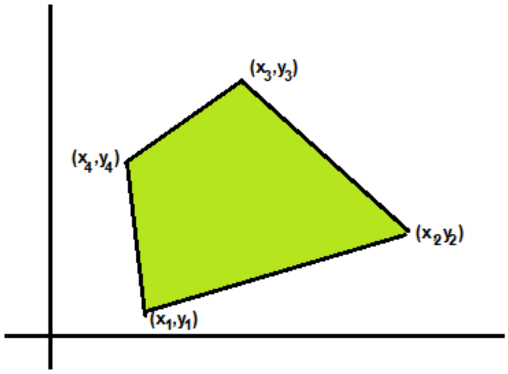


Ahora tenemos un triángulo cuyos vértices son (0,0), (a,0) , (c,d), en sentido contrario a las agujas del reloj, con a y d positivos.

½ (suma 1 – suma 2) = ½ ad que es, sin duda, positivo (y es el área del triángulo).

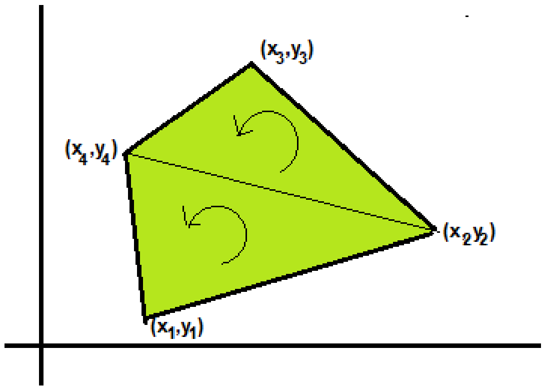
PASO 5: CUADRILÁTEROS

He aquí un cuadrilátero en el plano cartesiano:



Podemos calcular su área subdividiéndolo en dos triángulos y aplicando la fórmula del cordón de zapatos A = ½ (suma1 – suma 2) a cada parte, en el sentido contrario a las agujas del reloj en cada una.

(Notar que si marcháramos alrededor del cuadrilátero completo en sentido contrario a las agujas del reloj, entonces esa marcha "induce" a respetar el mismo sentido contrario a las agujas del reloj en cada uno de los triángulos interiores).



Área 1: (x_1,y_1) , (x_2,y_2) , (x_4,y_4)

$A_1 = ½ (x_1y_2 + x_2y_4 + x_4y_1 - y_1x_2 - y_2x_4 - y_4x_1)$

Área 2: (x_2,y_2) , (x_3,y_3) , (x_4,y_4)

$A_2 = ½ (x_2y_3 + x_3y_4 + x_4y_2 - y_2x_3 - y_3x_4 - y_4x_2)$

Sumando, el área total da:

$A = ½ (x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_4 + x_4y_1 - y_1x_2 - y_2x_3 - y_3x_4 - y_4x_1)$

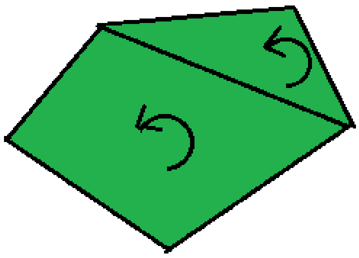
la que, deliciosamente, es la fórmula ½ (suma 1 – suma 2), aplicada a la lista de vértices del cuadrilátero en sentido contrario a las agujas del reloj: (x_1,y_1) , (x_2,y_2) , (x_3,y_3) , (x_4,y_4).

(Notar cómo los términos correspondientes al borde interior (x_2,y_2) a (x_4,y_4) se cancelan en la suma de las dos áreas parciales. Este lado interior es atravesado dos veces por los triángulos, pero en sentido contrario).

RESULTADO
Ordenar los vértices de un cuadrilátero en el plano cartesiano en el sentido contrario a las agujas del reloj. Entonces el área del cuadrilátero está dada por la fórmula del cordón de zapatos: ½ (suma 1 – suma 2).

PASO 6: MÁS ALLÁ DE LOS CUADRILÁTEROS

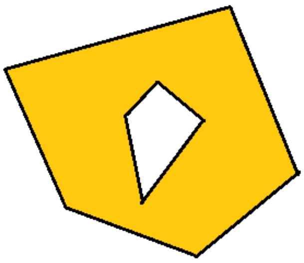
Si un polígono de N lados se puede ver como si se construyera adjuntando un triángulo a un polígono menor:



entonces se puede escribir la fórmula del cordón de zapatos ½(suma1 – suma2) para el polígono de (N – 1) lados: (x_1,y_1) , (x_2,y_2) …(x_{N-1},y_{N-1}) y la fórmula ½ (suma1 – suma2) para el triángulo (x_1,y_1) , (x_{N-1},y_{N-1}) , (x_N,y_N) y sumar ambas fórmulas.

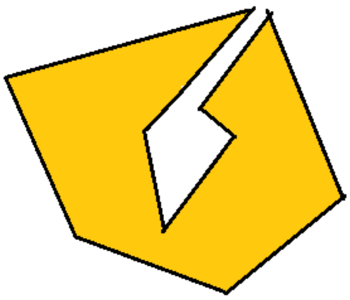
Se puede observar que los términos correspondientes a los vértices del lado común interior otra vez se cancelan. La fórmula resultante, ¡es la del cordón de zapatos aplicada directamente al polígono original de N lados! (Notar otra vez que si seguimos el sentido contrario a las agujas del reloj para el polígono más grande, todos los polígonos interiores naturalmente siguen el sentido contrario a las agujas del reloj también). Esto establece que la fórmula de Gauss del cordón de zapatos funciona para cualquier polígono razonable.

DESAFÍO: ¿Funciona la fórmula para un polígono con un agujero?



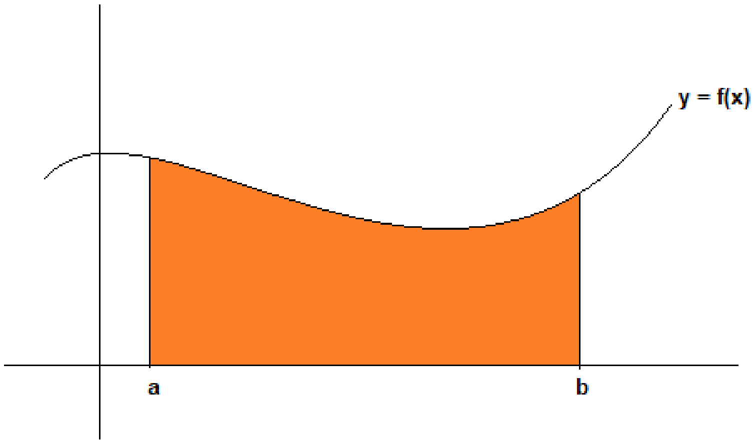
¿Se puede hacer que alguna versión de ella funcione?

Comentario: Por supuesto que uno puede calcular el área del polígono exterior y restarle el área del agujero. Pero, ¿se podrá de alguna manera razonable interpretar este polígono agujereado como un polígono no agujereado con dos bordes congruentes paralelos unidos infinitamente entre sí?

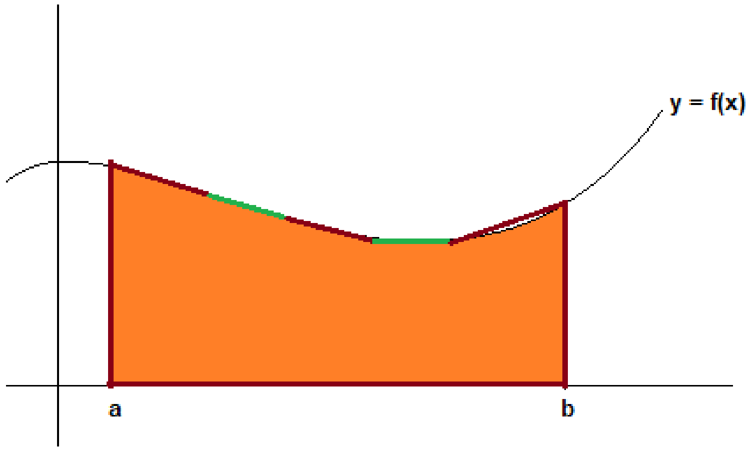


¿Ayuda esta manera de pensarlo? ¿Es interesante?

CONSULTA: Supongamos que se desea calcular el área bajo el gráfico de la función y = f(x) siguiente:



Podemos aproximar la curva con segmentos y aplicar la fórmula del cordón de zapatos a los polígonos resultantes:

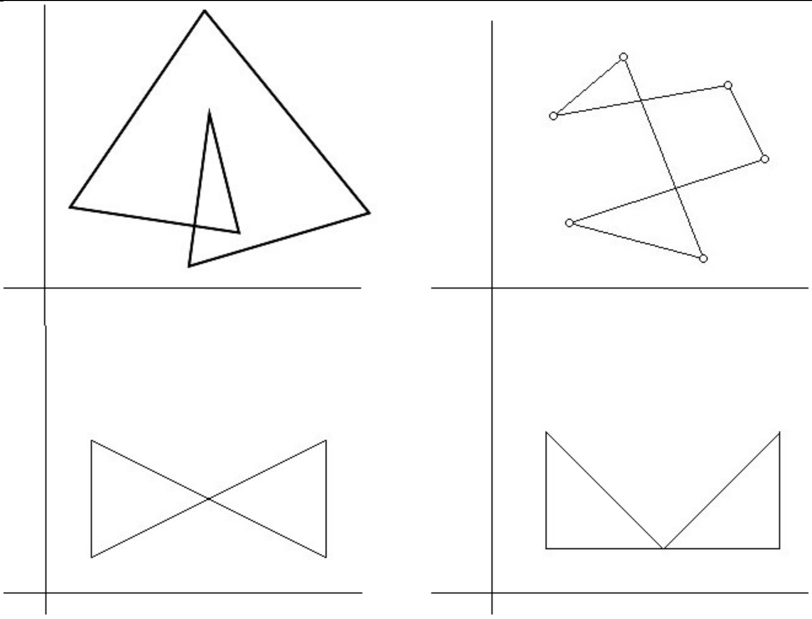


Tomando el límite de aproximaciones más y más pequeñas, deberíamos acercarnos a la verdadera área debajo de la curva: $\int_a^b f(x)dx$. La fórmula del cordón de zapatos, ¿nos ofrece una nueva forma de pensar en integrales?

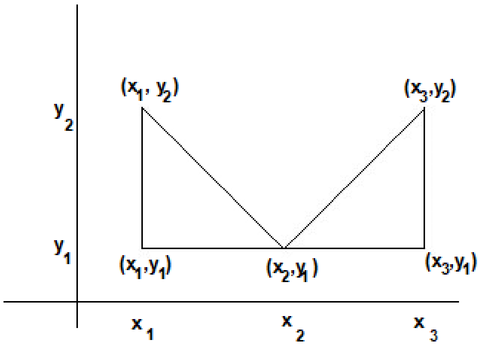
PROBLEMA
En el ejemplo abierto de un eneágono seguimos el sentido de las agujas del reloj, no contrario a las agujas del reloj. ¿Podría ser esto un problema?

RINCÓN DE INVESTIGACIÓN
¿Habrá una versión de la fórmula del cordón de zapatos para tres dimensiones, una que sirva para hallar el volumen de un poliedro?

DESAFÍO: ¿Funciona la fórmula si el polígono con un es cruzado o se superpone?
Verificar con polígonos como los que se muestran a continuación:



Por ejemplo:



Aplicando la fórmula del cordón de zapatos y yendo en sentido contrario a las agujas del reloj, los pares son (en este orden): (x_1,y_1) , (x_1,y_2) , (x_2,y_1) , (x_3,y_2) , (x_3,y_1):
$\frac{1}{2}\, [x_1,y_2 + x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_1 + x_3y_1 - y_1x_1 - y_2x_2 - y_1x_3 - y_2x_3 - y_1x_1]$ = **$\frac{1}{2}\, (x_1 - x_3)\, (y_2 - y_1)$**

Yendo en el mismo sentido que las agujas del reloj, los pares son: (x_1,y_1) , (x_2,y_1) , (x_3,y_1) , (x_3,y_2) , $(x_1,y_2$ + y Aplicando la fórmula del cordón de zapatos:
$\frac{1}{2}\, [x_1,y_1 + x_2y_1 + x_3y_2 + x_3y_2 + x_1y_1 - y_1x_2 - y_1x_3 - x_1x_3 - x_2x_1 - y_2x_1]$ = **$\frac{1}{2}\, [2x_1y_1 + 2x_3y_2 + y_1x_3 - x_1x_3 - x_2x_1 - y_2x_1]$**
DEBERÍA DAR EL OPUESTO DE RESULTADO ANTERIOR.

Calculando las áreas con la fórmula del triángulo:
$\frac{1}{2}\, (x_2 - x_1)\, (y_2 - y_1) + \frac{1}{2}\, (x_3 - x_2)\, (y_2 - y_1)$ = **$\frac{1}{2}\, (x_3 - x_1)\, (y_2 - y_1)$ que es la opuesta de la primer fórmula del cordón de zapatos**

Conclusión: La fórmula del cordón de zapatos para el cálculo de áreas funciona solo si los polígonos son simples. Si el polígono es cruzado o se superpone no funciona.