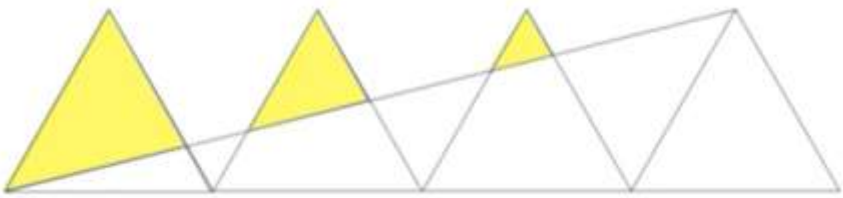
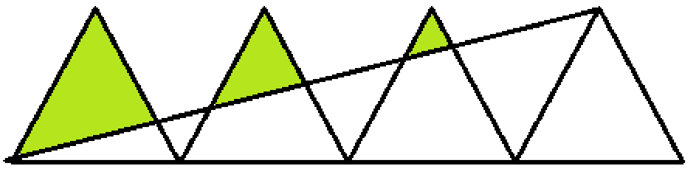
TREN DE TRIÁNGULOS

Adriana Rabino. Oscar Bressan

Cuatro triángulos equiláteros, tal como muestra la figura, tienen área 6u. ¿Cuál es el valor del área sombreada en color?

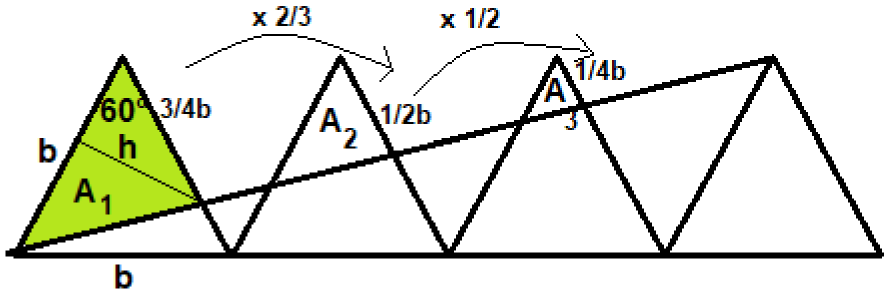


Posible solución:



Los tres triángulos pintados son semejantes porque sus lados correspondientes son paralelos.

Entonces, calculando el área de uno de ellos y aprovechando la proporcionalidad de las áreas, se puede calcular el área de los otros dos:



Utilizando relaciones trigonométricas se puede calcular A_1 (o cualquiera de las otras áreas) en función de b:

Sen 60° = h/(3/4b) => h = sen 60° . 3/4b = √3/2 . ¾ b = 3/8 √3 b

$\mathbf{A_1}$ = b . (3/8 √3 b) /2 = **3 √3 . $\mathbf{b^2}$ / 16**

Por otro lado, la relación entre las áreas tienen factores 4/9 y ¼ :

$\mathbf{A_2}$ = 4/9 A_1 = **(√3/12) .$\mathbf{b^2}$**

$\mathbf{A_3}$ = ¼ A_2 = 4/36 A_1 = **(√3/48) .$\mathbf{b^2}$**

Por lo tanto **$\mathbf{A_1 + A_2 + A_3}$ = (14/48) . √3.$\mathbf{b^2}$**

También se sabe que 4. (b . H)/2 = 6 => b . H = 3 (dato; llamamos H a la altura de cada triángulo equilátero)

Aplicando el Teorema de Pitágoras se puede obtener el valor de H (en función de b):

H = $\sqrt{b^2 - \frac{1}{4}b^2} = \sqrt{\frac{3}{4}b^2}$ = ½ b √3

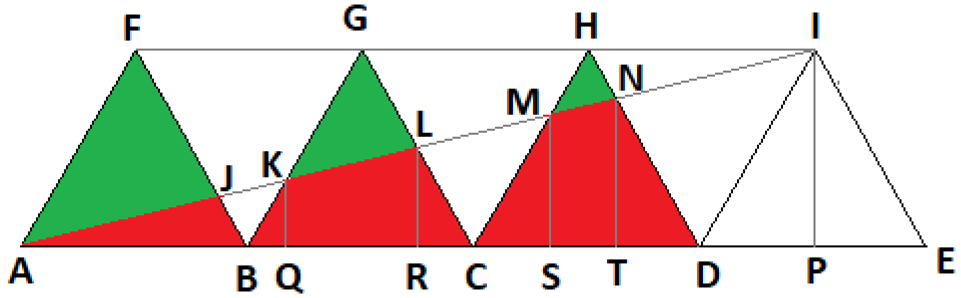
b . H = 3 => b . ½ b √3 = (√3/2) b^2 = 3 => b^2 = 2.√3

Volviendo a la suma de las áreas:
$A_1 + A_2 + A_3 = 14/48 . \sqrt{3}.b^2 = 14/8 = 1{,}75$ U

Extensión:

Al completar el trapecio aparecen otras relaciones interesantes, por ejemplo: ¿Qué relación hay entre las áreas en las que queda dividido el trapecio por la diagonal?

Otra mirada: Oscar Bressan pensó en la zona roja:



Tomo AB = 1 (luego todos los lados de los triángulos lo son por ser equiláteros).

Consideramos sobre AE las distancias.

A(0;0) B(1;0) C(2;0) D(3;0) P(3,5; 0) I(3,5 ;(√3)/2)

Se consideran las rectas intersecciones de los lados con la diagonal del trapecio mayor

Punto J: Intersección rectas	y = (√3)/7 x	con	y = - (√3) x + √3	x = 7/8; y = (√3)/8
Punto H: Intersección rectas	y = (√3)/7 x	con	y = + (√3) x - √3	x = 7/6; y = 1/(2 √3)
Punto L: Intersección rectas	y = (√3)/7 x	con	y = - (√3) x + 2√3	x = 7/4; y = (√3)/4
Punto M: Intersección rectas	y = (√3)/7 x	con	y = + (√3) x - 2√3	x = 7/3; y = 1/(√3)
Punto N: Intersección rectas	y = (√3)/7 x	con	y = - (√3) x + 3 √3	x = 21/8; y = 3 (√3)/8

Superficie triángulo ABJ = (1/2) 1 (√3)/8 = (√3)/16

Superficie triángulo BQK = (1/2) (7/6 - 1)*1/(2 √3) = 1/(24 (√3))

Superficie trapecio QRLK = (1/2) (1/(2 √3) + (√3)/4) (7/4 - 7/6) = 35/(96 (√3))

Superficie triángulo RCL = (1/2) (2 - 7/4) ((√3)/4) = (√3)/32

Superficie triángulo CSM = (1/2) (7/3 - 2) (1/√3) = 1/(6 (√3))

Superficie trapecio STNM = (1/2) (1/√3 + 3 (√3)/8) (21/8 - 7/3) = 119/(384 (√3))

Superficie triángulo TDN = (1/2) (3 - 21/8) (3(√3)/8) = 9 (√3)/128

Superficie total zonas rojas = 11/(8 (√3))