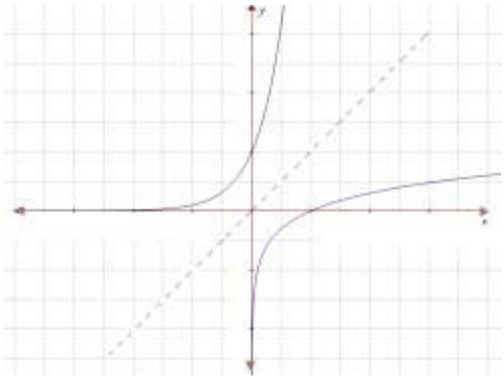
FUNCIONES EXPONENCIAL Y LOGARÍTMICA

Adriana Rabino y Patricia Cuello
(Colaboraron con el material de este capítulo las profesoras: Laura Halladjan, Flavia Santamaría y Azucena Riechert, integrantes del Grupo Patagónico de Didáctica de la Matemática)



Fundamentación

La **función exponencial** (y su inversa, la función logarítmica) generalmente se enseña en 4° año (16 años) de la educación secundaria, después de haber visto otros tipos de funciones como la lineal (caso particular la función de proporcionalidad directa), hiperbólica, cuadrática y potencial, como si éstas últimas fueran más sencillas.
Sin embargo, la exponencial es una función simple pero importante a la vez, ya que responde a la mayoría de los crecimientos de la vida: poblaciones, interés bancario u otras cantidades físicas, lo que hace que se puedan trabajar muchos problemas contextualizados y conectados con la vida real y que tengan significado para los estudiantes.
Así, la función exponencial se puede "presentar en sociedad" junto a otras funciones en forma general (3° año), y luego analizarla en profundidad tal como la veremos en esta secuencia, desde el enfoque de la *Educación Matemática Realista*. La misma se propone para cualquier año del ciclo superior.

A la **función logarítmica** la introducimos desde su proceso histórico para darle significado al concepto. En la época en que no había reglas de cálculo, calculadoras científicas o computadoras, se hacía muy dificultoso hacer operaciones de multiplicación, división, potenciación y radicación con números que tuvieran muchas cifras (ya sea por ser muy grandes o muy pequeños). Con el descubrimiento de los logaritmos, al presentarse una operación complicada se simplificaba la misma procediendo de la siguiente manera: se le aplica logaritmo, éste se distribuye de tal forma que se simplifican las operaciones (utilizando las propiedades de los logaritmos), se calculan esos logaritmos con el uso de una tabla y al llegar al resultado se busca el antilogaritmo (operación inversa del logaritmo) logrando así el resultado final deseado.

log (operación) = log...* log...* .....log... = log (resultado) => anti log (resultado) = resultado

Si bien los logaritmos han sido de tremenda utilidad durante mucho tiempo, hoy en día todo este proceso se puede obviar ya que el cálculo lo hace directamente una calculadora científica.
Sin embargo, cuando hay que resolver una ecuación exponencial, en donde se tiene a la incógnita en el exponente, no queda otro camino que recurrir a las propiedades de los logaritmos (aunque el resto de las operaciones lo haga la máquina).
Entonces proponemos en esta secuencia, presentar la función logarítmica primero como inversa de la función exponencial, para luego dar paso al logaritmo como operación, con su definición y propiedades, pero haciendo hincapié en dos propósitos mucho más prácticos:

1) resolver ecuaciones exponenciales y logarítmicas, y
2) aplicar la escala logarítmica en ciertas situaciones en que se torna indispensable.

Las TIC (Tecnologías de la Información y de la Comunicación) que se utilizarán en esta secuencia como recurso didáctico y soporte son GeoGebra, Graphmatica, Mathematica.

Propuesta
En un principio se trabaja con problemas sencillos de crecimiento y decrecimiento exponencial para que los estudiantes organicen la información, grafiquen con un graficador para ver el comportamiento de la relación entre las variables y descubran la ley de formación de esta función y todas sus características.
En un momento dado aparece el número *e* (irracional y trascendente), muy importante en los problemas de crecimiento de población y más adelante como base del logaritmo neperiano.
La función logarítmica se da atendiendo a dos fines fundamentales: por un lado la resolución de problemas que involucran ecuaciones exponenciales y logarítmicas, valorando y utilizando los logaritmos y sus propiedades, y por otro lado la necesidad del uso de la escala logarítmica y/o semilogarítmica en determinadas situaciones en que se torna indispensable hacerlo para representaciones gráficas.

Organización de la secuencia
Se sugiere que todas las actividades se trabajen en grupos de 3 alumnos.
Se inician las actividades con un problema doméstico: “¿Por la cocina cómo andamos?” lo suficientemente sencillo para que los mismos estudiantes re-descubran el comportamiento de la función exponencial y sus características. Se les pide que lo resuelvan como puedan (sin ningún instructivo previo). Se les sugiere que organicen la información de alguna manera. En algún momento aparece la necesidad de resolver una ecuación exponencial pero se les pide que la resuelvan haciendo aproximaciones con la calculadora, y así darle significado a la misma.
Se quiere que los estudiantes, que trabajan en grupos, organicen la información de este crecimiento a lo largo del tiempo (probablemente elijan hacerlo en una tabla o en un diagrama de árbol). En la búsqueda de regularidades en sus representaciones se pretende que lleguen al descubrimiento de la fórmula que modeliza la situación

planteada y su representación ("**modelos de**"). La pregunta acerca del tiempo que pasará para tener el mismo número de bacterias lleva a resolver una ecuación exponencial, utilizando sus estrategias personales (probando, ajustando, estimando o comparando los exponentes por métodos aritméticos o algebraicos u otros conocidos) dándole así significado a la misma. Una vez cumplida esta etapa, un representante de cada grupo debe mostrar a sus compañeros su producción (en poster o pizarrón), preguntando y argumentando sus resultados (interacción cognitiva y social). Con la guía del docente los estudiantes valorarán las soluciones más claras y económicas.
Posteriormente se proponen dos problemas: una situación de crecimiento y otra de decrecimiento exponencial. Cada grupo debe trabajar con uno solo de los problemas, el cual consta de algunas preguntas abiertas para investigar (en Internet o biblioteca). Se socializarán las investigaciones, los estudiantes deben discutir similitudes y diferencias entre ambas situaciones teniendo en cuenta todos los conceptos que involucran a una función: definición, dominio y rango, crecimiento, continuidad, máximos, etc., siempre con la guía del docente.
De aquí en adelante se proponen otros problemas de crecimiento y decrecimiento exponencial en diferentes contextos y aprovechando el modelo surgido anteriormente (ahora "**modelo para**" un tipo de situaciones afines a la dada).

Dentro de los problemas propuestos está el de la Cuenta Bancaria (interés compuesto). Como caso particular (bajo ciertas condiciones) aparece el número *e*. Más adelante se destaca la importancia y conveniencia del uso del número *e* como base del logaritmo natural (o neperiano), como así también el uso de la base 10 en los logaritmos decimales (acorde a la base 10 de nuestro sistema de numeración).

Se hace hincapié en practicar la resolución de ecuaciones exponenciales.

Posteriormente se quiere que los estudiantes descubran la definición de función logarítmica (como inversa de la función exponencial) y sus propiedades, que servirán de herramienta en la resolución de problemas que involucren ecuaciones exponenciales y logarítmicas.

Por último se trabajan problemas para cuya representación gráfica se hace necesario utilizar escala logarítmica y semi-logarítmica.

Es importante la socialización de las producciones, en donde cada grupo, en cortes parciales, muestre a sus compañeros su trabajo, comparándolo, argumentando, cambiando de perspectiva si es necesario, reconociendo las formas más económicas y óptimas para avanzar en la **matematización progresiva** y llegar a la **formalización**. Toca al docente guiar a los estudiantes en este proceso.

A continuación de las actividades se dan las posibles soluciones acompañadas de comentarios para el docente surgidos a partir de nuestra experiencia, con lo cual consideramos hacer un pequeño aporte y de esta manera que hagan un mayor aprovechamiento de las actividades.

Para tener en cuenta:

PALABRAS CLAVES: Función exponencial – Función logarítmica– crecimiento –

continuidad - ecuaciones exponenciales y logarítmicas – escalas logarítmicas y semi-logarítmicas

PRE-REQUISITOS
- Propiedades de la potenciación.
- Concepto de función.
- Concepto de crecimiento y continuidad de funciones.
- Resolución de ecuaciones.
- Uso de la calculadora científica.
- Gráficos cartesianos.

CONTENIDOS
- Función exponencial
- Función logarítmica
- Ecuaciones exponenciales y logarítmicas
- Escalas logarítmica y semi-logarítmica
- Uso de graficadores como GeoGebra, Graphmatica, Mathematica

NIVEL: 4º o 5º años de educación secundaria (16-17 años)

ACTIVIDADES

FUNCIÓN Y ECUACIONES EXPONENCIALES

1. ¿POR LA COCINA CÓMO ANDAMOS?

Dos millones de bacterias se están reproduciendo en la esquina de la mesada de tu cocina. Tú decides que es hora de asear tu casa. Usas un limpiador cuya efectividad en matar bacterias es del 99,9%.

Teniendo en cuenta que, durante la división celular, una bacteria se divide en mitades, formando dos células (bacterias) nuevas, luego cada bacteria se divide nuevamente en dos, y así sucesivamente (por esto se dice que estas bacterias tienen un factor de crecimiento 2), y suponiendo que el número de células se duplica cada 20 minutos.

a. Organiza tu información y encuentra una forma de expresar este crecimiento.

b. ¿Cuánto tiempo demorará aproximadamente en haber la misma cantidad de bacterias que antes de empezar a limpiar?

Los problemas 2 y 3 son para resolver simultáneamente, la mitad de los grupos de la clase hará el 2 y la otra mitad hará el 3.

2. LA DIVISIÓN CELULAR

Como en el caso de las bacterias de la cocina, muchos tipos de seres unicelulares se reproducen por bipartición. Es decir que cuando uno de estos seres adultos llega a un cierto grado de madurez, se divide y da lugar a dos nuevos seres. Cada uno de ellos, a su vez, y transcurrido cierto tiempo, repite el proceso. El tiempo entre dos particiones depende del tipo de célula y del medio en que se encuentra.

Nota: no todas las células del mismo cultivo tardan exactamente el mismo tiempo en dividirse. Lo que se hace es tomar el conjunto de células y ver cuánto tarda ese conjunto en duplicarse. De esta manera se simplifica la descripción del fenómeno y se hace más sencillo su análisis.

La célula que vamos a analizar es la **Escherichia coli**, una de las principales bacterias que vive en el intestino bajo de los mamíferos, inclusive el de la raza humana. Estas bacterias son necesarias para una digestión adecuada y son parte de la flora intestinal.

Investiga en Internet todos los datos posibles de esta bacteria que permitan responder la siguiente pregunta:

a. ¿Por qué a estas bacterias se las denomina amigas o enemigas? Investigar.

Ahora supongamos que preparamos un cultivo de E. coli en un laboratorio, en el cual ponemos 1.000.000 de dichas bacterias en un medio ambiente ideal.

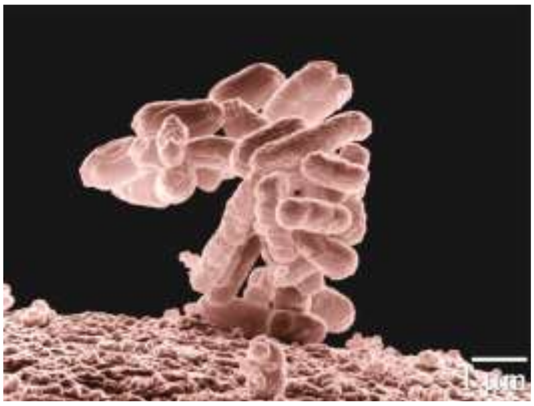
b. ¿Cómo puede ser el crecimiento de estas bacterias? (en cantidad). Organiza el proceso, generaliza y representa de alguna manera este crecimiento.

c. ¿Por qué necesitan dividirse las células?

d. ¿Siguen creciendo indefinidamente (en cantidad)? (comparar con los crecimientos de otras poblaciones y conjetura una respuesta).

3. VIDA MEDIA

La **vida media** es el tiempo en que determinadas sustancias o isótopos radiactivos, en determinadas condiciones, se reducen en cantidad a la mitad (como por ejemplo, el carbono 14).



a. Investiga cuál es la vida media de la cafeína, del alcohol y de drogas de uso medicinal (por ejemplo amoxicilina, ibuprofeno) y otras en el cuerpo humano de un adulto sano.

b. Organiza el proceso, generaliza, grafica y saca conclusiones.

c. Según los datos obtenidos en el paso anterior, ¿podemos asegurar que la cafeína, alcohol, drogas medicinales, etc. desparecerán totalmente de nuestro organismo transcurrido un cierto tiempo?

d. ¿Cómo podemos visualizar e interpretar la respuesta anterior en los gráficos?

e. ¿Alguna vez esta función toma el valor cero?

4. APROVECHANDO EL GRAFICADOR

a. Grafica la función $y = 2^x$.

b. Multiplica esta función por distintos valores en cada caso (positivos, negativos, enteros, fraccionarios o decimales, mayores que 1, menores que -1, entre 1 y -1).

Saca conclusiones del efecto que produce el parámetro k en la función $y = k \cdot a^x$.

c. A la función $y = 2^x$, súmale una constante a la variable en el exponente (positiva o negativa). Luego suma un valor constante a la función total (positivo o negativo). Probar con varios casos.

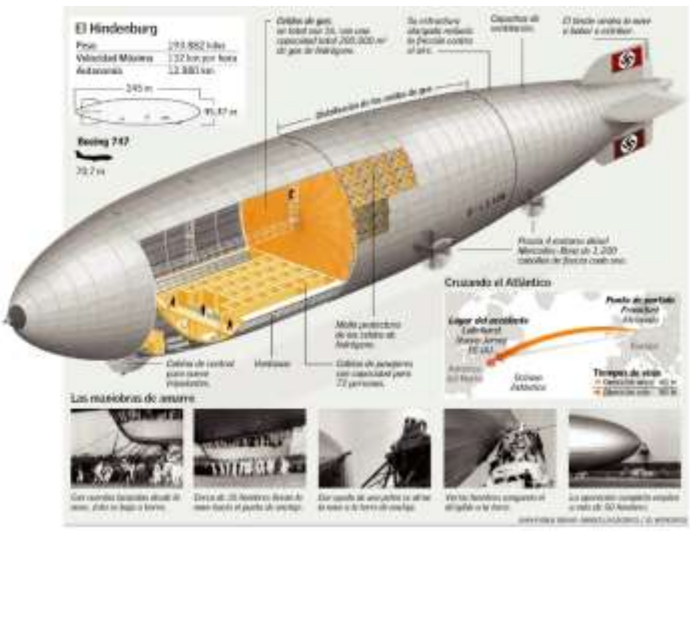
d. Sacar de los efectos que produce cada parámetro en la función $y = k \cdot a^{(x-h)} + p$.

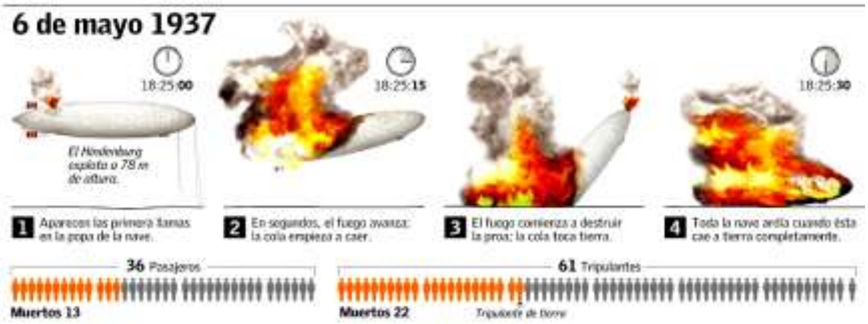
e. ¿Qué acontece cuando la base es positiva? ¿Qué sucede si la base es negativa? ¿Y si vale 1? Prueba, explica y determina a qué conjunto numérico pertenece la base en una función exponencial.

5. MÁS PROBLEMAS

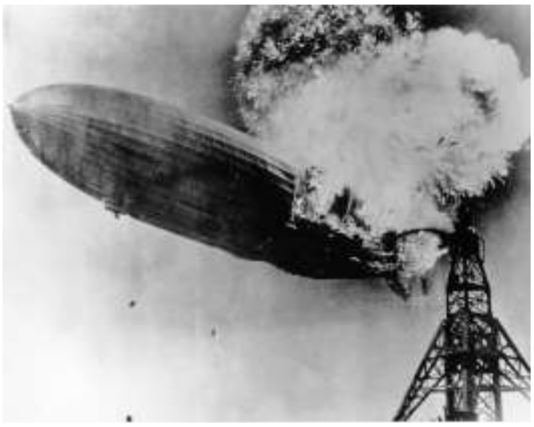
A. EL HINDENBURG

El LZ 129 Hindenburg era un dirigible y fue la nave aérea más grande que se haya construido hasta el presente.
El primero de agosto de 1936, el Hindenburg (el orgullo de la Alemania de Hitler) se presentó en la ceremonia de apertura de los 11º Juegos Olímpicos en Berlín, Alemania. Momentos antes de la llegada de Adolf Hitler, la nave cruzó sobre el estadio olímpico llevando la bandera olímpica en su cola.
Durante 1936, su primer año de operación comercial, el Hindenburg voló 191.583 millas (308 323 kilómetros), llevando 2798 pasajeros y 160 toneladas de carga y correspondencia. En ese año la nave hizo 17 viajes a través del Océano Atlántico con 10 viajes a Estados Unidos y 7 a Brasil.





La foto de la derecha muestra lo que ocurrió el 6 de mayo de 1937. Mientras la nave aterrizaba en la Estación Aérea Naval de Lakehurst en Nueva Jersey, fue destruida por el fuego.



El dirigible podía cargar 200 000 m^3 de gas en 16 bolsas (14 de hidrógeno y 2 de aire). Normalmente el gas se escapaba a través de la envoltura que cubría el tanque con hidrógeno a un ritmo tal que una pérdida del 50% en 10 días era normal. Cada 10 días, el 50% del gas desaparecía.

a. Si el tanque del Hindenburg estaba completo, ¿cuánto gas quedó después de 10 días? ¿Y después de otros 10 días más?

b. Encuentra una fórmula que describa la cantidad de gas (G) que queda en la nave después de t unidades de tiempo (la unidad es 1 día).

c. Una pérdida del 50% cada 10 días significa una pérdida de 6,69% por día. ¿Es correcto?

d. Grafica la función hallada.

Las aeronaves modernas son bastante más pequeñas (contienen alrededor de 3.000 m^3 de gas) y la pérdida de gas en ellas es mucho menor, sólo el 2% cada 10 días. e. Encuentra una fórmula que describa la cantidad de gas que queda en una aeronave moderna después de t días.

B. CUENTA BANCARIA

Considera que inicias una cuenta bancaria en el Banco Ideal el 1º de enero con un monto inicial de $10 000. La razón de interés anual es de 5%. Si dejas el dinero en el banco, el monto crecerá exponencialmente a través de los años. Después de un año, tendrás
$10500. Los 500 pesos de interés se añaden al monto inicial el último día del año. Después del segundo año esto será $ 10500 + 5% de $ 10500 = $ 11025. Otra vez: el interés de $ 525 se agregan el último día del segundo año.
a. ¿Cuál es el factor de crecimiento por año? Explica.
b. ¿Qué fórmula describe el monto de dinero (M) en la cuenta del banco a través de los años (t)?

c. ¿Cuánto dinero hay en la cuenta después de 10 años?
d. ¿Cuántos años llevará duplicar el dinero en la cuenta?
e. Analizar crecimiento, continuidad, dominio, etc.
Como se trata de un proceso discreto también es posible pedirle al banco que sume los intereses cada mitad de año o cada dos años.
f. Discutir las siguientes fórmulas para estas dos opciones:

"Para la opción de interés cada medio año: $M(t) = 100 \times (1,025)^{2t}$"

"Para la opción de interés cada dos años: $M(t) = 100.x\ (1,10)^{1/2t}$"

El tiempo t sigue en unidades de 1 año.
g. Explicar por qué el exponente cambia de 2t a ½ t en las dos opciones.
h. ¿Piensas que el banco aceptaría la opción de medio año? ¿Y la de dos años? Explica.

EL NÚMERO e (llamado así en honor a Euler) **OCULTO EN EL INTERÉS COMPUESTO**
Sabemos que los números irracionales son infinitos. Sin embargo hay algunos que se destacan por alguna particularidad, como por ejemplo el número **π** que nos indica la cantidad de veces que está contenido el diámetro de cualquier circunferencia en su longitud (y a partir de esto surgen muchas relaciones y definiciones en geometría en donde está presente π), el número de oro **φ** (aparece muchas veces en la naturaleza y el hombre lo ha aprovechado en obras de arte y de arquitectura para lograr formas armoniosas) y el número ***e***, importante porque es uno de los números más vinculados a cuestiones humanas como por ejemplo de la economía, de la estadística y de la teoría de la probabilidad. El número e (como base de la función exponencial) ha representado un papel preponderante ayudando a los matemáticos a describir y pronosticar lo que para el hombre constituye el más importante de todos los fenómenos naturales: el del crecimiento.

6. Grafica la función $y = (1+1/x)^x$ tomando valores muy grandes de x, por ejemplo empezando en 1, 2, 10, 100, 1000…..(y mucho más grandes). ¿Es creciente? ¿A qué valor se acerca?

Definición: el número e es el valor límite de la sucesión $(1 + 1/x)^x$

7. CURIOSIDADES:
Hay varias formas de representar el número e, por ejemplo, como suma de sucesiones (series).
A continuación expresamos algunas de ellas y te pedimos que compruebes con la calculadora que, cuanto más elementos se tomen de estas series, el resultado se aproxima cada vez más al número e (el número e aparece en la calculadora científica):

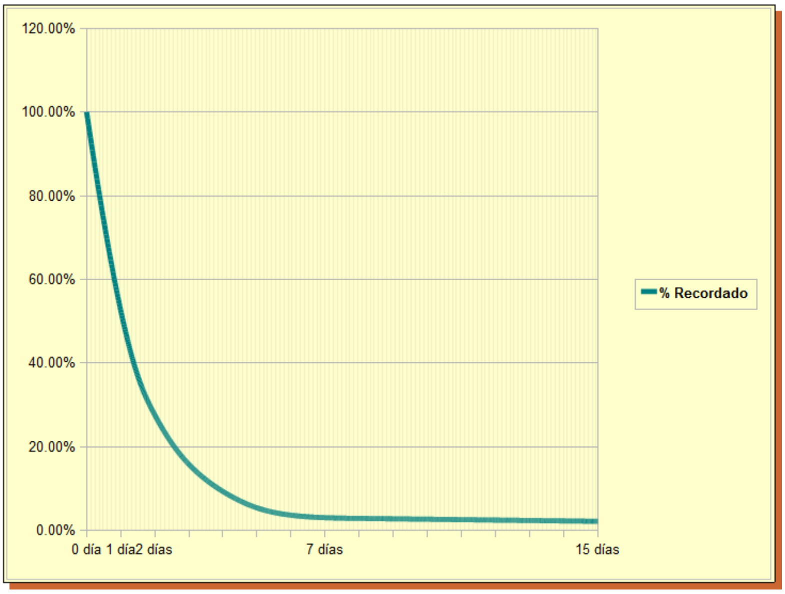
$$e = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\dots\dots\dots$$

$$e = 2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{2}{3+\cfrac{3}{4+\dots}}}}$$

PROBLEMAS QUE INVOLUCRAN AL NÚMERO e

8. LA CURVA DEL OLVIDO

El filósofo alemán Hermann Ebbinghaus (1850-1909) habló de la naturaleza del olvido de información como una función exponencial parecida a la que puedes ver en el gráfico, en donde el tiempo está dado en días y la retentiva en porcentaje.

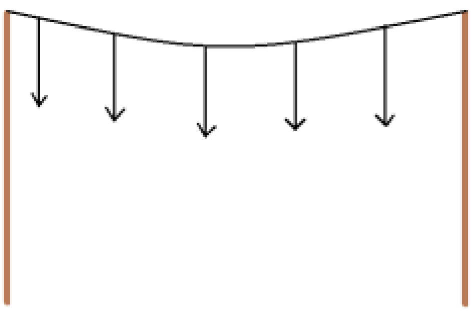


La **curva del olvido** ilustra la pérdida de retentiva con el tiempo. Un concepto relacionado es la intensidad del recuerdo, que indica cuánto se mantiene un contenido en el cerebro. Cuanto más intenso sea un recuerdo, más tiempo se mantiene. Un gráfico típico de la curva del olvido muestra que normalmente en unos días o semanas se olvida la mitad de lo que hemos aprendido, a no ser que lo repasemos.
Una aproximación matemática a la curva de la memoria es la siguiente fórmula:

$$R = e^{\frac{-t}{S}}$$

donde R es la retentiva, S la intensidad relativa del recuerdo y t es el tiempo "decrecimiento exponencial".
La velocidad con la que olvidamos depende de diversos factores, como la dificultad de la materia (por ejemplo si es absurdo o tiene sentido), su representación (puede ser regla mnemotécnica) y factores fisiológicos como el estrés y el sueño. El ritmo de olvido basal es prácticamente el mismo para todas las personas. La diferencia de rendimiento (por ejemplo en la escuela) podría depender de qué representaciones mnemónicas hace cada individuo. Esto significa que unas personas "crean" su memoria de forma más efectiva que otras.

Deducir del gráfico cuál es el valor de S. (Sugerencia: armar una ecuación fijando un valor de R y t extraídos del gráfico, e ir probando valores con la calculadora).
¿Cuál es la retentiva R después de 3 días?



9. LA CATENARIA

Los cables de tendidos telefónicos o las cuerdas en los tenderos no siguen una línea horizontal, tienen una forma curva denominada catenaria. Un cable que cuelga libre, tiene todas sus fuerzas internas en equilibrio (ver figura):
Ésa es la razón por la cual la catenaria (invertida) constituye un arco perfecto ya que todos los esfuerzos están perfectamente distribuidos y actúan precisamente en sus apoyos. Por consiguiente se ha utilizado esta estrategia en arquitectura para construir arcos.

El arco de Gateway en San Louis (Missouri) fue diseñado por Eero Saarinen y terminado en 1965. Con una altura equivalente a unos 60 pisos, está cubierto por 900 toneladas de acero inoxidable de un cuarto de pulgada y pesa alrededor de 16000 toneladas. Es el monumento más alto de Estados Unidos, más alto que el monumento a Washington y 325 pies (99 metros) más alto que la Estatua de la Libertad. Es un ejemplo de arco construido en forma de catenaria. Su altura máxima es de 192 metros (630,3 pies), igual a la separación entre los dos puntos de arranque a nivel del suelo (pese a la ilusión óptica que sugiere lo contrario).
Si se graficara esta forma, su ecuación sería:

y ~ 757,71 – 127,71 $\left(\dfrac{e^{x/127,71}+e^{-x/127,71}}{2}\right)$ siendo **e** ~ 2,718

a. Verifica, a partir de la ecuación, que su altura es igual a la distancia entre sus dos apoyos.

b. Grafícala con un graficador y verifica el resultado anterior.

¡A PRACTICAR ECUACIONES EXPONENCIALES!

10. Resolver las ecuaciones siguientes (Utilizar la propiedad que la función exponencial es estrictamente creciente o decreciente).

a) $3^x = \dfrac{1}{9}$ e) $2^x = 8\sqrt{2}$ i) $5^{2x-6} = 1$

b) $3^{-x} = 27$ f) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x = 8\sqrt{2}$ j) $5^{-2x+6} = 25$

c) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2-x} = \dfrac{3}{2}$ g) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x+3} = 32$ k) $5^{-x} = \dfrac{1}{125}$

d) $\left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{2}{3}$ h) $2^{x+6} = 16$ l) $3^x = -1$

En caso de que no den un resultado exacto, buscar alguna estrategia para hallar una buena aproximación.
Ejemplo: encontrar todos los valores de x tal que $2^x \sim 14$

11. Resolver las siguientes ecuaciones. Si puedes encuentra el valor exacto, sino aproxima con 3 decimales.

$a)\ 5.\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-1} = 20$ b) $3^{x+1} = 1$ c) $2.\left(\frac{1}{2}\right)^{-2x+3} + 3 = 53$

$d)\ \frac{1}{2}.3^{x+2} - 12 = 28{,}5$ e) $5.\left(\frac{1}{2}\right)^{3x+2} = 80$ f) $4.7^{x+2} + 3 = 4$

12. Resolver:

$a)\ e^{x+2} = \frac{1}{e}$ b) $e^x = 10$ c) $e^{x-3} = \frac{1}{e^2}$

$d)\ 5.e^{x-3} + 11 = 26$ e) $e^x = 4$ f) $e^{x-3} = e$

g) $e^{-x+2} = 10$ h) $e^{x+2} = \left(\frac{1}{e}\right)^x$ i) $\left(\frac{1}{e}\right)^{x+2} = 15$

POSIBLES SOLUCIONES Y COMENTARIOS

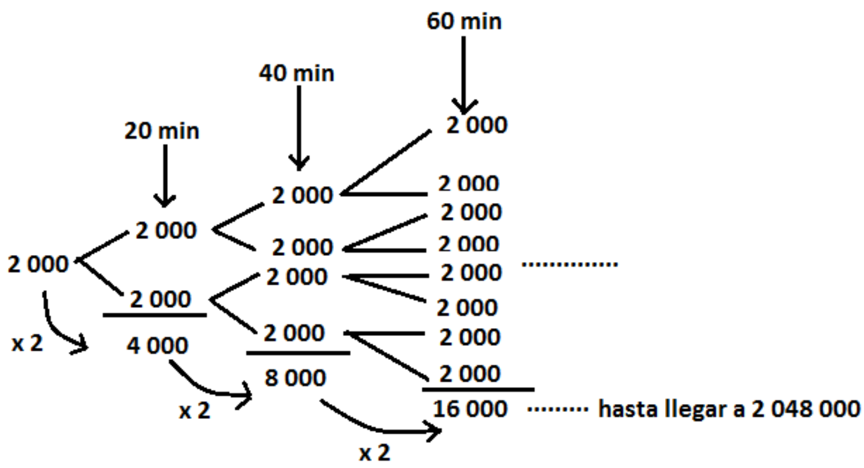
1. *El objetivo más importante de este problema es que, a partir de la búsqueda de regularidades en las representaciones utilizadas, descubran el tipo de crecimiento de este fenómeno.*

Si el desinfectante tiene un 99,9% de efectividad, quiere decir el 0,1% de bacterias queda vivo. Eso significa: 0,1% de 2 000 000 = 2 000.

Los alumnos pueden organizar los datos que van surgiendo con un diagrama de árbol, o con una tabla de valores o con gráfico (u otra estrategia).

Algunos planteos de organización pueden ser los siguientes (obtenidos de la experiencia con nuestros alumnos):

- Diagrama de árbol



- Tablas de valores (usando como unidad de tiempo los minutos o períodos de 20 minutos)

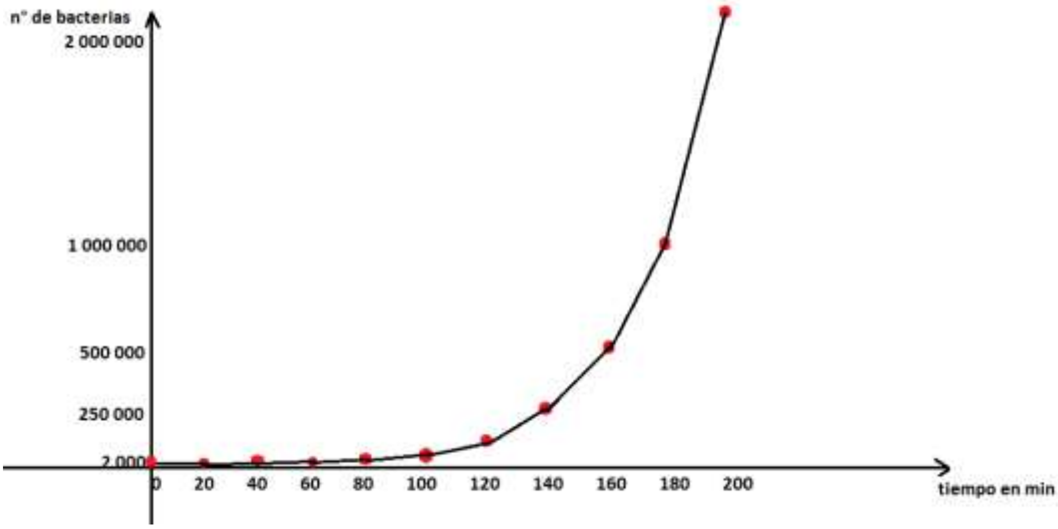
tiempo (min)	bacterias	
0	2 000	x 2
20	4 000	x 2
40	8 000	
60	16 000	.
80	32 000	.
100	64 000	.
120	128 000	.
140	256 000	
160	512 000	
180	1 024 000	entre estos dos datos hay 2 000 000 bacterias, o sea que entre 180 min y 200 min (más cerca de 200) = 3,3 horas
200	2 048 000	

tiempo (períodos de 20 min)	bacterias	
0	2 000	2 000
1	4 000	2 000 x 2
2	8 000	2 000 x 2 x 2= 2 000 x 2^2
3	16 000	2 000 x 2 x 2 x 2= 2 000 x 2^3
4	32 000	2 000 x 2 x 2 x 2 x 2.....
5	64 000	.
6	128 000	.
7	256 000	.
8	512 000	.
9	1 024 000	
10	2 048 000	

De la segunda tabla los estudiantes pueden asociar (o se los puede inducir a) la potencia con el número de períodos. Verán que siempre el número de bacterias es 2 000 . 2^n, donde n es el número de períodos. Esta tabla es la ideal para que surja la generalización o fórmula respecto de esta situación. Por supuesto que el resultado va a estar entre el 9º y 10 º período.

Como cada grupo trabaja en forma independiente, las producciones pueden ser diferentes. Entonces es muy importante la etapa de socialización (ya sea usando papelógrafos o en el pizarrón). De esta manera se pueden comparar todas las soluciones en forma simultánea, se corrigen los errores y se llega a la solución más clara y concisa, analizando ventajas y desventajas de cada representación.

Algunos pueden resolver el problema con un gráfico cartesiano:



La ventaja del gráfico cartesiano es que se pueden analizar otros tópicos de esta función: ¿es creciente o decreciente? ¿Crece siempre al mismo ritmo? ¿Es continua o discreta? ¿Por qué?... Pero tiene la desventaja que la solución gráfica es aproximada. De todos modos, hasta ahora todas las estrategias usadas para resolver este problema condujeron a una solución aproximada.

Todas estas formas de organizar la información para lograr una respuesta al problema (diagrama de árbol, tabla de valores, fórmula, gráfico cartesiano) son modelos de, y se denominan así porque permiten solucionar esta situación (son "modelos de" esta situación en particular).

El problema nos conduce a la fórmula B= 2 000 . 2^t, donde B es el número de bacterias y t es el número de períodos de 20 minutos.

Ante la pregunta "¿se puede dar una respuesta al problema que no sea aproximada?",

la respuesta es sí, pero todavía los estudiantes no tienen las herramientas para hacerlo (estamos hablando de aplicar logaritmos para resolver una ecuación exponencial).

De todas maneras podemos hacer una mayor aproximación a la respuesta. Se trata de resolver la siguiente ecuación: 2 000 000 = 2 000 . 2^x o sea que tenemos que encontrar un valor x de tal manera que al elevar al 2 ese número y multiplicarlo por 2 000 dé como resultado 2 000 000. Se pueden hacer una buena aproximación con la calculadora. El resultado es 9,965785 (que es el número de períodos). Si multiplicamos este valor por 20 nos va a dar el número de minutos: 199,32, y si lo dividimos por 60 nos da la cantidad de horas: 3,32.

De esta manera y siguiendo todo este proceso constructivo, el alumno le dará significado a la función y ecuación exponenciales.

El problema no termina cuando se terminaron las cuentas. La respuesta a esta situación "molesta" es que, a poco más de 3 horas de haber limpiado la cocina (precisamente 3,32 horas) otra vez tenemos la misma cantidad de bacterias ¡qué bajón!

2 y 3.

Ahora se presentan dos problemas. El primero similar al de la cocina pero el otro no. La idea es que se aproveche la instancia de socialización para que se puedan comparar los dos crecimientos exponenciales (uno con base mayor que 1 y el otro con base entre 0 y 1), destacando similitudes y diferencias.

Se propone darles a cada grupo un solo problema (ya sea el 2 o el 3) de tal manera que la mitad de la clase trabaje con un problema y la otra mitad con el otro.

El problema 2 es de crecimiento exponencial creciente y el problema 3 es de crecimiento exponencial decreciente.

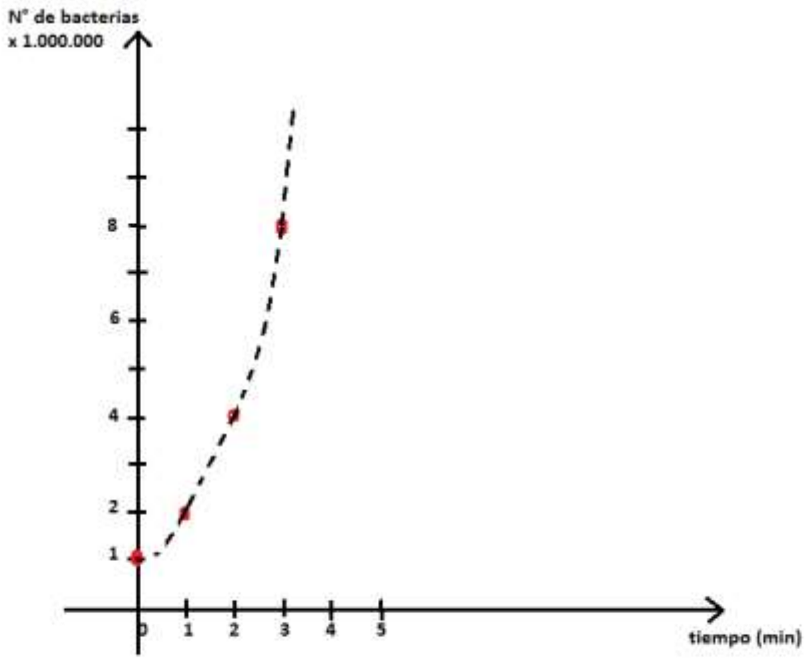
El propósito es que los alumnos investiguen en internet para poder responder a las preguntas. Una vez concluida esta tarea, en la etapa de socialización de las producciones se analizarán las similitudes y diferencias de cada tipo de función, como así también se discutirán las conjeturas surgidas.

2. a. Se dice que estas bacterias son amigas o enemigas porque todo ser vivo de sangre caliente las transporta en sus intestinos porque cumplen ciertas funciones, pero en una cantidad determinada. Depende de la cantidad y del tipo de esta bacteria para que se transforme en algo muy nocivo para el organismo.

b. *Para organizar el crecimiento de la Escherichia coli ver cómo se trabajó en el problema 1. En este caso los períodos son de 15, 18 o 20 minutos (según distintas fuentes). Discutir en clase a qué se pueden deber estas diferencias y qué criterio se adopta para ponerse de acuerdo y elegir el mismo valor. Supongamos períodos de 20 minutos.*

Período	Tiempo(en min)	Nº bacterias
0	0	1.000.000
1	20	2 000 000
2	40	4 000 000
3	80	8 000 000
…	…	…
n	20 . n	1 000 000 . 2^n

Se llega a la fórmula: Nº de bacterias = 1 000 000 . 2^n .
Se puede representar en un gráfico cartesiano la situación para poder sacar más conclusiones.
La variable es discreta (cantidad de bacterias), por lo tanto se dibuja el gráfico con línea punteada.
La variable dependiente nunca podrá adoptar valores negativos, pues no tiene sentido que el número de bacterias sea negativo (deben números naturales). Tampoco puede valer cero por las siguientes razones: desde el momento en que se empieza la experiencia ya se tienen un millón de bacterias y además no se puede empezar a reproducir algo a partir de la "nada", no tiene sentido.



c. Las células necesitan dividirse por una relación existente entre su área y su volumen. Si son muy pequeñas, la relación del área con respecto al volumen es muy grande (mucha área y poco volumen), en este caso se sobresaturan y perecen (ya que se "alimentan" a través de las paredes y recibirían mucho alimento respecto del tamaño de la célula), y si son muy grandes, como el área crece "más despacio" con respecto al volumen, llega un momento en que no se pueden alimentar lo suficiente (ver problema en la página www.gpdmatematica.ar). Por eso, como la naturaleza es sabia, cada una en el "momento justo" se divide en dos partes y vuelve a crecer hasta que se repite el "momento justo".

d. Esta bipartición no sigue indefinidamente porque sería un caos (es lo que pasa con las células cancerígenas, que por una malformación siguen creciendo y se transforman así en tumores). O sea que a medida que crecen en número hay otra cantidad de ellas que se va muriendo, como todo crecimiento de población.

3. a. *Acá se trabaja con la **vida media**, esto es el tiempo en que una determinada sustancia se reduce a la mitad. Se les pide a los estudiantes que investiguen la vida media de diferentes sustancias, por ejemplo el alcohol en sangre. Esto quiere decir que averigüen cuánto tiempo pasa hasta que el alcohol se redujo a la mitad en el organismo.*

Es muy conocido el método del carbono 14 (un isótopo radiactivo) que se utiliza para determinar la cantidad de años que tiene un fósil desde que el animal se murió. Todos los seres vivos contienen carbono 14. Entonces si se conoce la cantidad de este isótopo que tuvo en sus huesos un ser prehistórico, por ejemplo, al conocer la vida media del C_{14} y sabiendo cuánto de este isótopo quedó en el fósil en la actualidad, se puede determinar la cantidad de períodos de vida media que pasaron (es decir, cuántas veces se redujo a la mitad) y de esta manera conocer la edad del fósil.

La vida media de la cafeína -esto es, el tiempo requerido para que el cuerpo elimine la mitad de la cantidad total inicial de **cafeína**- varía ampliamente entre individuos de acuerdo a ciertos factores como la edad, función hepática, embarazo, algunas drogas concurrentes y el nivel de enzimas en el hígado necesarias para el metabolismo de la cafeína. En adultos sanos, la vida media de la cafeína es de unas 4 a 9 horas. Esto quiere decir que tarda ese tiempo en reducirse a la mitad.

La vida media del **alcohol** depende de varios factores: el peso, la edad, el género, la tasa metabólica, los niveles de tensión, el tipo de alcohol ingerido, la cantidad, la cantidad de alimento ingerida antes de beber el alcohol y el estado de salud de órganos como el hígado, determinarán considerablemente si se demora más o menos tiempo en **eliminar el alcohol de la sangre**.

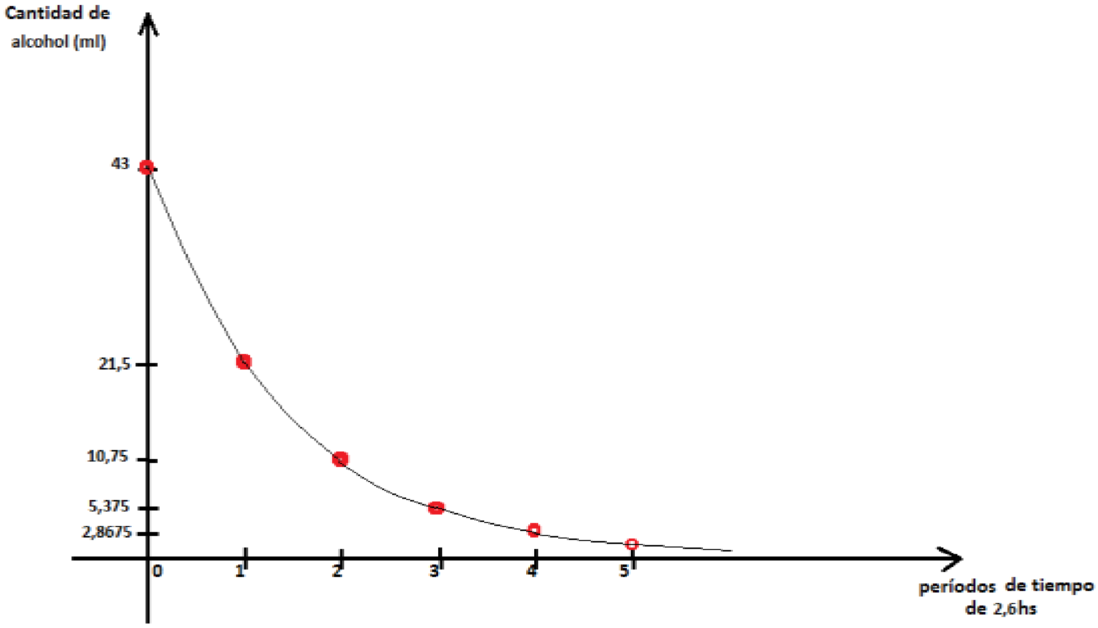
Un organismo medio normal y cuyo hígado funciona adecuadamente elimina 10ml de alcohol puro por hora. Para tener una idea, 10ml de alcohol están contenidos en 30ml de whisky o en 236ml de cerveza. Esto sería el ritmo con que va desapareciendo el alcohol del organismo.

Pero cuando hablamos de vida media, nos estamos refiriendo al tiempo que transcurre para que la droga se reduzca a la mitad (que no es lo mismo que el ritmo).

Supongamos que una persona está ingiriendo una botella de 1 litro de cerveza. Por el dato anterior, esta bebida contiene 42,37 ml de alcohol puro (redondeemos a 43). Con estos datos se puede calcular la vida media del alcohol en sangre. La fórmula general es: $\mathbf{A = 43 \cdot (1/2)^n}$. También sabemos que transcurrida 1 hora el alcohol será de 33ml. Reemplazando en la fórmula y aproximando el valor de n, nos da n ~ 0,38. Quiere decir que 1 hora corresponde a 0,38 partes del período. Haciendo una simple proporción resulta que el período (vida media) es de 2,6 horas.

b.

período	Tiempo (h EN COMPARACIÓN)	Cantidad (g)
0	0	43
1	2,6	21,5
2	5,2	10,75
3	10,4	5,375
4	20,8	2,6875
5	41,6	1,34375
6	83,2	0,672
7	166,4	0,336
8	332,8	0,168
9	665,6	0,084
n	2,6. n	$43 . (1/2)^n$



Cuando se organiza la información, el gráfico cartesiano es el más claro para responder a las otras preguntas y comparar esta función con la del problema 2. Esta última es una función exponencial de base ½.

Se puede generar una linda discusión durante la socialización para saber si alguna vez desaparece esta sustancia (o sea si la función se hace cero en algún momento). ¿Qué pasa matemáticamente y que pasa en la realidad?

c. e. En teoría, la sustancia nunca desaparece, a pesar de que toma valores infinitamente pequeños. No ocurre esto en la realidad, en algún momento desaparece el último vestigio de droga.
d. La curva nunca "toca" el eje de abscisas.
Cuando se comparan las dos funciones de los dos problemas, se verá que una es creciente y la otra decreciente (en este caso una es simétrica de la otra respecto al eje de ordenadas porque sus bases son inversas). La variable dependiente nunca toma valores negativos.
Se pueden analizar otro tópicos como continuidad, ceros de la función, ordenada al origen, qué pasa si se toman valores negativos en el dominio, etc.

Se pueden proponer preguntas como las siguientes:

- *Retrocediendo en el tiempo, ¿alguna vez será negativo? ¿tiene sentido? ¿tiene sentido que f(x) = 0? ¿qué quiere decir? ¿podrá empezar a reproducirse algo a partir de cero?*
- *¿Qué significa base 1 en el problema? ¿qué pasaría con el número de bacterias y por qué?*
- *¿Puede la función tender a -∞?*
- *Mostrar un modelo de función logística o de crecimiento poblacional y analizar el comportamiento de la misma con los alumnos, buscando una analogía entre el crecimiento de bacterias y el de poblaciones en general.*

- *Analizar la relación entre los gráficos de los dos problemas trabajados.*

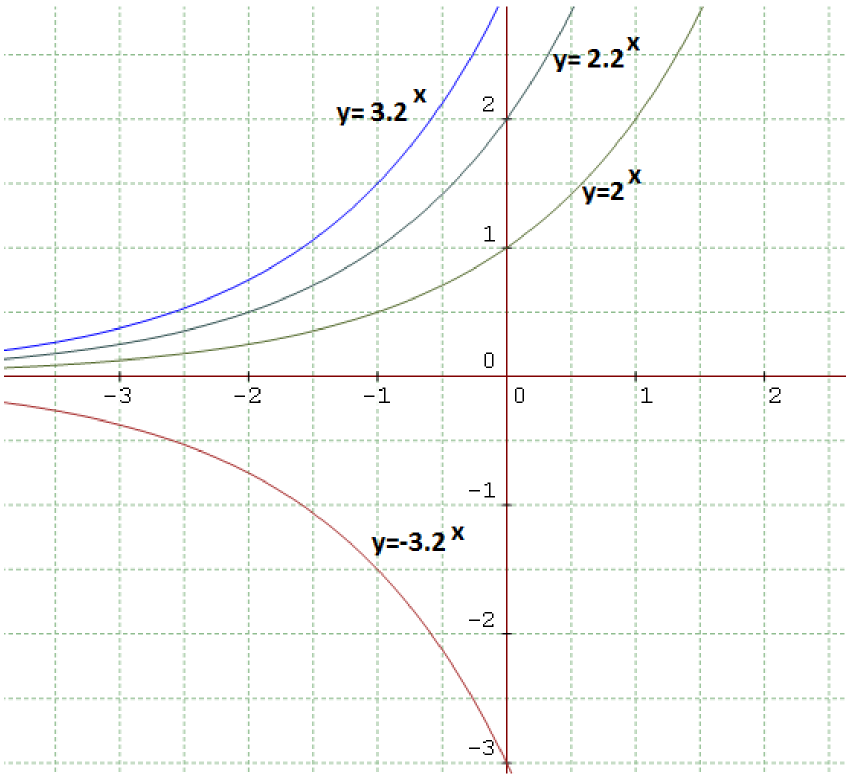
Ahora los alumnos están en condiciones de comprender la forma general de la función exponencial: $y = k \cdot a^x$ *, donde el parámetro **k** es el valor inicial del fenómeno , **a** es la base del exponente (aquella constante que encuentran los estudiantes cuando buscan la regularidad, por ejemplo si se va multiplicando siempre por 2 o por ½ en las progresiones geométricas) y **x** es la variable independiente que está en el exponente.*

(Tener en cuenta que la función exponencial puede estar afectada por otros parámetros).

4. APROVECHANDO EL GRAFICADOR

Como el objetivo de esta actividad no es el pasaje de la fórmula al gráfico a través de una tabla de valores, sino ver la transformación del gráfico de la función exponencial a medida que variamos sus parámetros, vamos a hacer uso de un software graficador (GeoGebra o Graphmatic, por ejemplo). La idea es que los alumnos descubran estas transformaciones y las puedan sistematizar.

a. b.

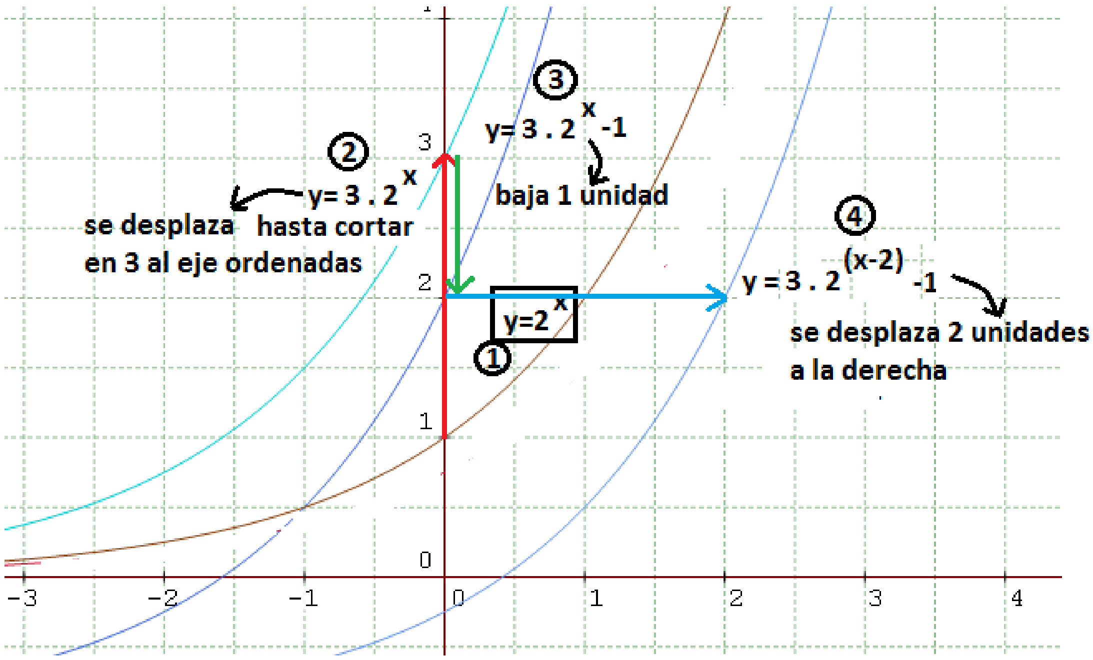


Por ejemplo en este caso se varía el parámetro k, tanto en su valor absoluto como en su signo. Los estudiantes descubren que este parámetro corresponde a la ordenada al origen y que si se le cambia el signo la función dada se transforma en su simétrica con respecto al eje de abscisas.

*Se pueden producir desplazamientos horizontales y verticales. Éstos son análogos a los desplazamientos en cualquier función, o sea que si le restamos el parámetro a la variable independiente resulta un desplazamiento horizontal y si se suma a la expresión total hay un desplazamiento vertical (ambos parámetros son números reales). En nuestro caso, si el exponente es x - a, se desplaza **a** unidades a la derecha o izquierda según sea **a** positivo o negativo. Si a la expresión se le suma o resta un parámetro la función se desplaza en forma vertical tantas unidades como ese valor lo indique (ya sea positivo hacia arriba o negativo hacia abajo).*

c.

Por ejemplo: $y = 3 \cdot 2^{(x-2)} - 1$



d. Se muestran en el ejemplo el efecto producido por cada parámetro paso a paso: se desplaza la función $y = 2^x$ hasta que pasa por el 3 de ordenada, luego baja 1 unidad y por último se desplaza 2 unidades a la derecha.

e. Si la base de la función exponencial es negativa, la función va a ir a los “saltos” según si el exponente es par o impar. Además si la base es 1, la imagen va a ser constante igual a 1. O sea que la base de la función exponencial son los números reales positivos distintos de 1.

5. MÁS PROBLEMAS

A. EL HINDENBURG

Los estudiantes pueden organizar la información de la manera en que se sientan más cómodos. El modelo de la tabla de valores es óptimo para luego graficar o encontrar regularidades y para hallar fácilmente la expresión algebraica que simboliza este decrecimiento.

a. Los períodos de tiempo son de 10 días, o sea que se puede tomar este período como unidad de tiempo o se pueden utilizar como unidad 1 día. Otra cosa que se sabe es que al inicio (período 0) el volumen de gas era 200 000 m^3 y que por cada período transcurrido se perdía el 50% (o sea la mitad).

Tiempo (períodos de 10 días)	0	1	2	3	4	5
Volumen de gas (m^3)	200 000	100 000	50 000	25 000	12 500	6 250

Si seguimos la tabla, después de 10 días habrán quedado 196,875 m^3. Y si seguimos más la tabla, a los 20 días quedan 0,192 m^3.

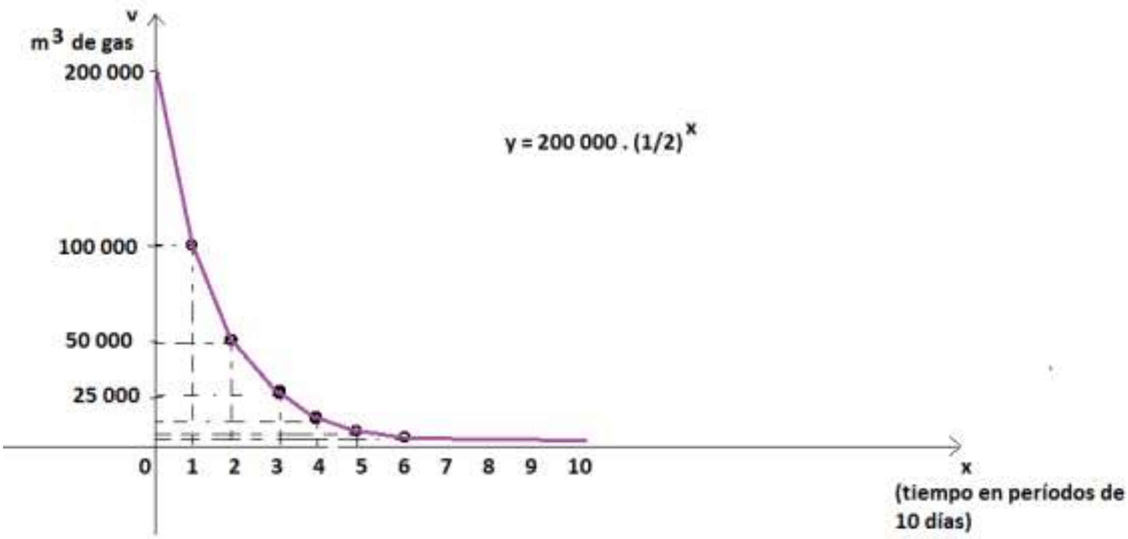
b. La fórmula, tomando como ejemplo los problemas anteriores, es $y = 200\ 000 \cdot (1/2)^x$, en caso de que x represente períodos de 10 días, pero si queremos que la unidad de tiempo sea el día la fórmula es $y = 200\ 000 \cdot (1/2)^{x/10}$.
La tabla correspondiente sería la siguiente:

Tiempo en días	0	1	2	3	4	5
Volumen de gas (m^3)0	200 000	186 606	174 110	162 450	151 572	141 421

Se verá que si seguimos buscando valores en la tabla, cuando la cantidad de días es 10, el resultado de gas es la mitad, o sea 100 000 m^3 (cuando x = 10, reemplazando en la fórmula nos da 100 000).

c. Sí, es cierto que se pierde el 6,69% de gas por día aproximadamente. Es tentador pensar (y es probable que los alumnos lo hagan) que si en 10 días se pierde el 50%, en un día se perderá el 5%, pero recordemos que este decrecimiento <u>no es lineal</u>. Haciendo un cálculo sencillo de proporcionalidad directa se puede calcular qué porcentaje decreció de un valor a otro.

d.



e. Para las aeronaves más pequeñas la fórmula sería y = 3 000 . $(2/100)^{t/10}$, tomando el tiempo en días

B. CUENTA BANCARIA

a. El factor de crecimiento por año es del 5% o 0,05.

Para hallar la fórmula (o la generalización de esta situación) se les puede pedir otra vez a los estudiantes que organicen la información. Es probable que a esta altura recurran a la tabla de valores. A veces es mejor dejar las expresiones sin desarrollar para encontrar la regularidad.

b.

Tiempo (años)	Monto	Monto en símbolos
0	10000	**C**
1	10000+5% de 10000 = 10500	C + i.C = **C.(1+i)**
2	10500+5% de 10500 = 11025	**C.(1+i)** + i.[C.(1+i)] = (1+i).(C+i.C)= =(1+i).(C+i.C)=(1+i).C.(1+i)= $\mathbf{C.(1+i.C)^2}$
3	11025+5% de 11025=11576	$\mathbf{C.(1+i)^2}$ +i. $C.(1+i)^2$= $C.(1+i)^2.(1+i)$=$\mathbf{C.(1+i)^3}$
4	11576+5% de 11576=12155	$\mathbf{C.(1+i)^3}$ + i….
t	…	$\mathbf{M = C.(1+i)^t}$

c. Después de 10 años en la cuenta habría 10000 . $(1 + 0{,}05)^{10}$ = $ 16288.

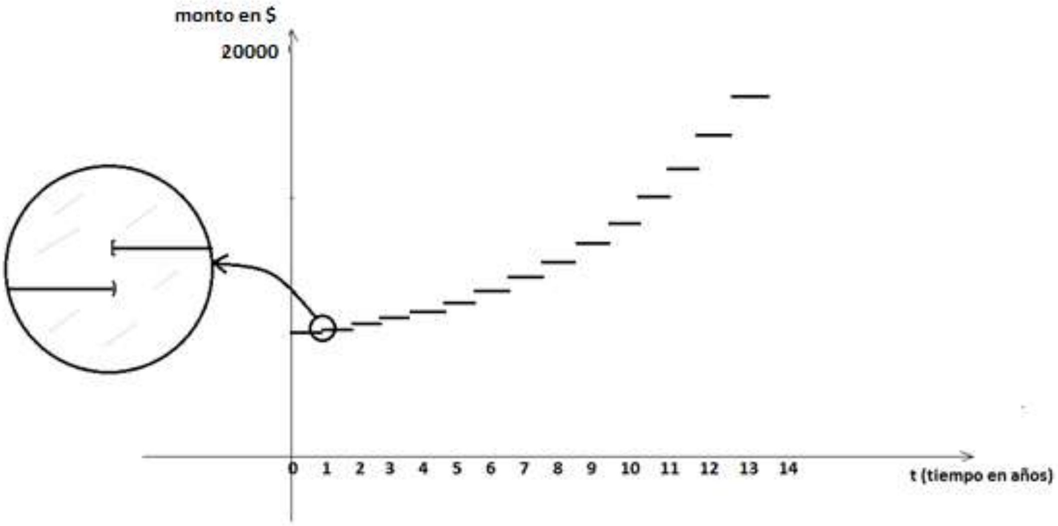
d. Para ver cuántos años deben pasar para que se duplique el dinero en la cuenta hay que plantear la siguiente ecuación y despejar el valor de t: 10000 . $(1 + 0{,}05)^t$ = 20000

Como todavía no se les enseñó a los estudiantes a aprovechar las propiedades del logaritmo para despejar un exponente, pueden resolver este problema haciendo aproximaciones con la calculadora. Esta ejercitación les ayudará a comprender mejor el significado de esta ecuación.

Por ejemplo, ya saben por la pregunta anterior que 10 años es poco. Entonces se puede probar con 15 para ir acotando. Así da 20789. Nos pasamos. Podemos probar con 14, y así sucesivamente. ¿Pueden ser números no enteros los períodos de tiempo?

La realidad es que no, aunque matemáticamente lo sea. Pensemos que los intereses se acreditan el último día del año. El resultado matemático de esta ecuación da 14,2, pero en el año 14 todavía no alcanza a 20000, esto va a suceder a finales del año 15. En ese momento tampoco va a haber $ 20000 exactos (serán $ 20789). O sea que si bien matemáticamente este problema tiene solución, en la realidad no lo tiene.

e. Si graficamos esta función nos va a dar escalonada:



En la lupa se ve que el escalón termina con un paréntesis y empieza con un corchete. Esta es una convención universal, para ponernos de acuerdo a cuál de los dos escalones corresponde la imagen de ese punto: el paréntesis indica que nos acercamos lo más que deseemos a ese punto sin tocarlo, y el corchete significa que el punto extremo corresponde a ese "escalón".

Esta función es creciente, discontinua y su dominio son los números naturales (en la realidad, no hasta infinito).

f. g. Si el interés es cada medio año (semestral) hay que dividir por 2 el interés (porque hay 2 semestres en el año) y el tiempo t se multiplica por 2 (nº de semestres en el año). Por lo tanto la fórmula es correcta. Análogamente, si el interés es cada 2 años hay que multiplicarlo por 2 y el tiempo se divide por 2 ya que es la cantidad de períodos de 2 años que hay en un año. Entonces la fórmula es correcta.

h. Al banco no le conviene el interés cada medio año, sí en cambio cada dos años. Pensemos en los escalones: a la mitad del año aumentaría el monto, en cambio, si es cada dos años, se mantiene constante hasta el término de ese período y recién después aumenta. Pero como es interés compuesto, el monto final también varía al cabo de 10 años:

Por año: $16288

Por semestre: $ 16386

Cada 2 años: $ 16105

6. *La situación planteada en el problema de la cuenta bancaria nos permite acercarnos al número e a través de una sucesión.*
Intuitivamente los estudiantes pueden pensar que si aumentamos el número de períodos los valores de monto obtenidos van a ser cada vez mayores. Sin embargo descubrirán que estos valores, si bien crecen y nos favorecen, se van estabilizando convergiendo a un valor constante. Si seguimos este procedimiento obtendremos más cifras decimales que no se repiten en forma periódica. Es importante en este momento

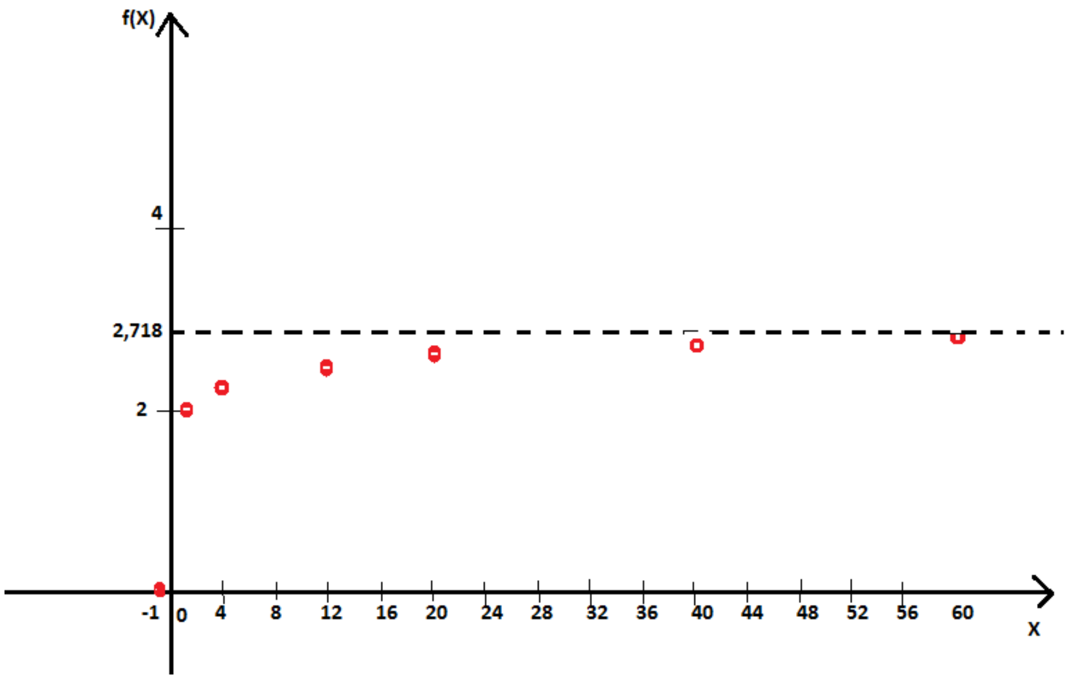
resaltar que este número (que se llama e en honor a Euler) es irracional (se puede aprovechar este momento para recordar sus propiedades).

capitalización	períodos	Interés	fórmula	Monto al cabo de 1 año
Anual	1	100/100=1	$(1+1)^{1}$	2
Semestral	2	1/2	$(1+1/2)^{2}$	2,25
Trimestral	4	1/4	$(1+1/4)^{4}$	2,44140625
Mensual	12	1/12	$(1+1/12)^{12}$	2,61303529
Diario	365	1/365	$(1+1/365)^{365}$	2,714567482
Cada hora	8 760	1/8760	$(1+1/8760)^{8760}$	2,718126692
Cada minuto	525 600	1/525600	$(1+1/525600)^{525600}$	2,718279243
Cada segundo	31 536 000	1/31536000	$(1+1/31536000)^{31536000}$	2,718281781

El número e aparece mayormente en el crecimiento económico y en el crecimiento de poblaciones, en problemas de probabilidad, en las curvas para modelar la descomposición radiactiva y en muchas otras situaciones, como se verá ejemplificado en algunos problemas presentados más adelante.

7. $f(x) = (1 + 1/x)^{x}$

x	-2	-1	1	2	3	4	20	100	1000
f(x)	4	0	2	2,25	2,370	2,44	2,65	2,70	2,716



$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+.........$ = 1 + 1/1 + ½ + 1/6 + 1/24 + 1/120 + 1/720 +.....= 1 + 1 + 0,5 + 0,16666... + 0,041666... + 0,008333... + 0,00138888... +... = *e*

$$2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{2}{3+\cfrac{3}{4+\dots}}}} = e$$

PROBLEMAS QUE INVOLUCRAN AL NÚMERO *e*

8. LA CURVA DEL OLVIDO

Del gráfico podemos deducir que para un valor cualquiera de tiempo, por ejemplo para 2 días transcurridos la retentiva es aproximadamente del 25%. Si reemplazamos estos dos valores en la ecuación, resulta: $25 = e^{-2/s}$

Se pueden ir probando valores hasta aproximarse al resultado. Este método es tedioso, pero tiene dos ventajas: los estudiantes le dan significado a la ecuación y por otro lado valorarán el uso de logaritmos para resolver ecuaciones exponenciales (aunque lo vean más adelante). El resultado de s es aproximadamente 1,44. Usar el valor de e que aparece en la calculadora científica. ¡Importante! Tener en cuenta cuando se hace el reemplazo en la fórmula, que la retentiva R está dada en porcentaje, o sea que hay que ponerla como fracción o decimal (por ejemplo, 50% es 50/100 o ½ o 0,5).

La retentiva después de 3 días es $R = e^{-3/1{,}44} = 0{,}12 = 12/100 = 12\%$.

9. LA CATENARIA

Es interesante detenerse un poco acá con los estudiantes para analizar el ingenio arquitectónico. Si una soga o cable está tendido, la fuerza de gravedad va a influir en forma pareja en todo su recorrido. Al invertir este arco, la distribución de fuerzas es perfecta.

Como ellos no tienen los recursos matemáticos para resolver esta ecuación y hallar sus raíces, se puede hacer una tabla de valores e ir aproximando datos en ese entorno (ayudándose con el gráfico) e ir comprobando resultados para que nos dé lo más cerca posible a cero. Luego hay que calcular f(0) y ver que coincide con la diferencia entre las dos raíces. Debemos aclararles a los estudiantes que este método inductivo no da una certeza (salvo que el resultado sea un número entero, muy difícil en este caso). Pero tiene su ventaja, que es la de darle significado a lo que se está haciendo.

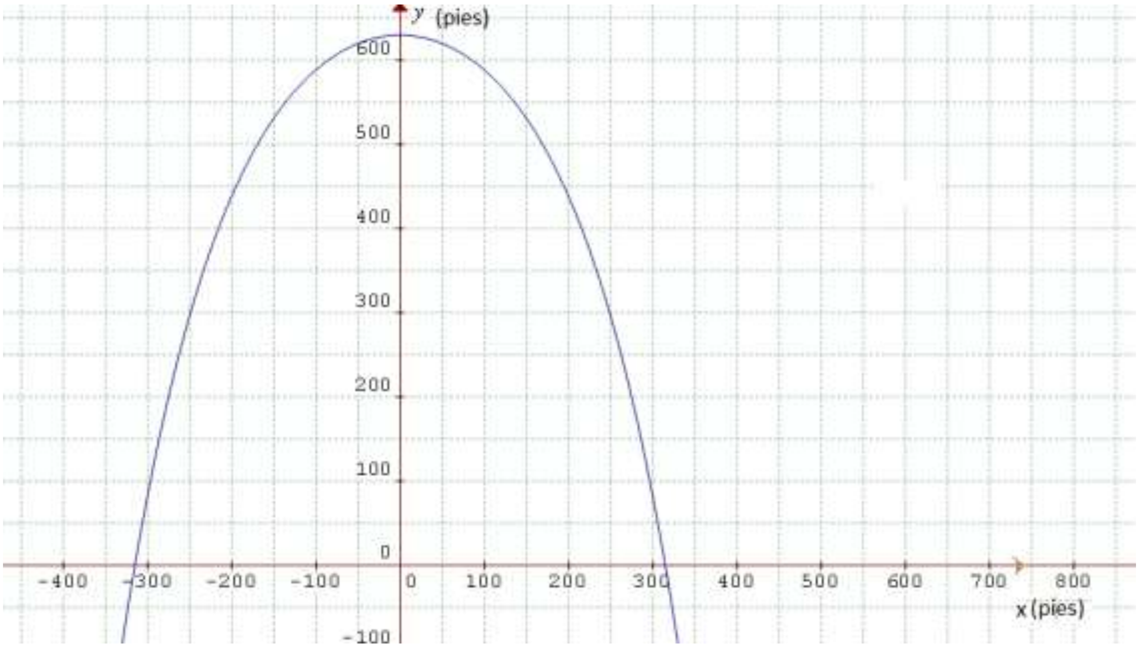
x (en pies)	300, -300	310, -310	320,-320	315, -315
f(x)	82,67	28,65	-29,84	0,014

Hemos logrado una buena aproximación (que todavía se puede mejorar). Observar que cuando empiezan a aparecer resultados negativos hay que volver atrás, porque quiere decir que entre los dos últimos resultados la función corta al eje de abscisas y por lo tanto hay una raíz (ver Teorema de Bolzano). Podemos decir que los valores 315 y -315 son raíces de esta función aproximadamente. La distancia entre ellas (o su diferencia) es 630, que sería la distancia entre los apoyos del arco.

Ahora sólo nos queda verificar que f(0) es ~ 630 (que sería la altura del arco):

f(0) ~ 757,71 – 127,71 $\left(\dfrac{e^{0/127,71}+e^{-0/127,71}}{2}\right)$ = 757,71 – 127,71 = 630

Queda así verificado.



PRACTIQUEMOS: ECUACIONES EXPONENCIALES

Si bien es importante darle significado a la función exponencial a través de buenos problemas buscando estrategias variadas para resolverlos, una vez cumplida esta etapa es importante la práctica en la resolución de ecuaciones y todas las propiedades que involucran descubriendo distintas estrategias para su resolución, a pesar de no conocer todavía el uso de los logaritmos.

10. En general se trata de llevar ambos miembros a la misma base. De esta manera se le da también significado a la ecuación como un equilibrio (y no el despeje en forma mecánica). Aparece así las propiedad uniforme y su aplicación. Por ejemplo:

- **a.** $3^x = 1/9 \Rightarrow 3^x = 3^{-2} \Rightarrow x = -2$
- **d.** $(3/2)^x = 2/3 \Rightarrow (3/2)^x = (3/2)^{-1} \Rightarrow x = -1$
- **i.** $5^{2x-6} = 1 \Rightarrow 5^{2x-6} = 5^0 \Rightarrow 2x – 6 = 0 \Rightarrow x = 3$

Para encontrar el valor de x en la ecuación $2^x \sim 14$, sabemos que $2^3 = 8$ y $2^4 = 16$, o sea que 3 < x < 4 (más cerca de 4), entonces podríamos decir que el resultado es aproximadamente 3,8. Pero todavía podemos mejorar este resultado. Haciendo $2^{3,8}$ = 13,92, o sea que es un poco más que 3,8. Probemos con 3,85: $2^{3,85}$ = 14,42 (nos pasamos). Podemos buscar 3,82…y así sucesivamente.

Es importante decirles a los jóvenes que estudiando logaritmos van a tener las herramientas para poder resolver estas ecuaciones en forma precisa.

11. *En algunas ecuaciones, utilizando una estrategia apropiada, se puede llegar al resultado exacto. En cambio en otros casos, se puede trabajar realizando aproximaciones (en este caso se trata de números irracionales, por lo tanto se pueden hacer buenas aproximaciones pero no se llegará al resultado exacto).*

a. $5.\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-1} = 10$

$2^{-2x+1} = 2$

$-2x + 1 = 1$

$-2x = 0$

$x = 0$

b. $3^{x+1} = 1$

$3^{x+1} = 3^0$

$x + 1 = 0$

$x = -1$

c. $2.\left(\frac{1}{2}\right)^{-2x+3} + 3 = 53$

$2.\left(\frac{1}{2}\right)^{-2x+3} = 50$

$2^{2x-3} = 25\ (este\ valor\ está\ entre\ 2^4 y 2^5$

Entonces probemos: 2x – 3 = 4 => 2x = 7 => x = 3,5
2x – 3 = 5 => 2x = 8 => x = 4

X está entre 3,5 y 4. Probemos en $2^{2x-3} = 25$

$2^{2.3,6-3} = 18,379$

$2^{2.3,8-3} = 24,25$

$2^{2.3,85-3} = 25,99$ (está entre estos dos últimos resultados)

$2^{2.3,82-3} = 24,933$ (está entre éstos dos últimos)

$2^{2.3,821-3} = 24,967$

Se pueden seguir haciendo aproximaciones hasta llegar lo más próximo a 25.

d. $\frac{1}{2}.3^{x-2} - 12 = 28,5$

$\frac{1}{2}.3^{x-2} = 40,5$

$3^{x-2} = 81 = 3^4$

$X - 2 = 4$

$X = 6$

e. $5.\left(\frac{1}{2}\right)^{3x+2} = 80$

$2^{-3x-2} = 16 = 2^4$

$-3x - 2 = 4$

$x = -2$

f. $4 . 7^{x+2} + 3 = 4$

$4 . 7^{x+2} = 1$

$7^{x+2} = ¼ = 0,25$

Se va probando con distintos valores de x:

$7^3 = 343$ (si x = 1) ; $7^2 = 49$; $7^1 = 7$; $7^0 = 1$ (si x = -2) ; $7^{-1} = 0{,}1428$. Esto quiere decir que el valor de x está entre -2 y -3. Seguir probando con otros valores decimales para hacer una mejor aproximación.

12. *En las próximas ecuaciones está presente el número irracional e, muy protagónico en estas funciones y ecuaciones. Otra vez, se deben encontrar estrategias para poder resolver las mismas, y si no, buscar las mejores aproximaciones.*

a. $e^{x+2} = 1/e$
$e^{x+2} = e^{-1}$
$x + 2 = -1$
$x = -3$

b. $e^x = 10$
Haciendo aproximaciones:
$e^1 = 2{,}71828$
$e^2 = 7{,}3890$
$e^3 = 20{,}0855$
quiere decir que el valor de x está entre 2 y 3. Seguir aproximando

c. $e^{x-3} = 1/e^2$
$e^{x-3} = e^{-2}$
$x - 3 = -2$
$x = 1$

d. $5 \cdot e^{x-3} + 11 = 26$
$e^{x-3} = 3$
Buscar valores de x que Puedan acercar al resultado.
Si x = 4
$e^1 = 2{,}71828$
$e^2 = 7{,}3890$
El valor de x está entre 4 y 5.
Seguir aproximando.

e. $e^x = 4$
Buscar aproximaciones en forma análoga a b. y d.

f. $e^{x-3} = e$
$x - 3 = 1$
$x = 4$

g. $e^{-x+2} = 10$
Buscar por aproximaciones.

h. $e^{x+2} = (1/e)^x$
$e^{x+2} = e^{-x}$
$x + 2 = -x$
$2x = -2$
$X = -1$

i. $(1/e)^{x+2} = 5$
$e^{-x-2} = 15$
Buscar aproximaciones.

II Parte: FUNCIÓN Y ECUACIONES LOGARÍTMICAS

¿POR QUÉ SURGIERON LOS LOGARITMOS?

Recurrir al proceso histórico para comprender como fueron concebidos ciertos conceptos y teorías, tiene varias ventajas. Además de poder entender por qué y cómo fueron gestados y construidos esos conceptos y desarrollado esas teorías, permite comparar los métodos y técnicas de aquel entonces con las actuales y reconocer los avances tecnológicos.

Los logaritmos fueron creados hace aproximadamente 400 años y usados hasta la fecha.
En la navegación y en la astronomía se requería de cálculos muy complicados. En ese momento, se le sugirió a John Napier (Edimburgo, 1550-1617) que inventara algún artificio para facilitar esos cálculos.

Su mayor aporte en el campo de la matemática fue el concepto de **logaritmo**. La primera obra que publicó en ese sentido fue *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio* (Descripción de una admirable tabla de logaritmos) en 1614. Allí describe cómo utilizar los logaritmos para resolver problemas con triángulos y da una tabla de logaritmos.

El concepto que tuvo Napier de los logaritmos fue una idea ingeniosa y bien conocida: una comparación entre puntos animados de movimiento, uno de los cuales engendra una progresión aritmética y el otro, una geométrica. Las dos progresiones siguientes muestran esta interesante relación.

aritmética	0	1	2	3	4	5	6	7	8……
geométrica	1	2	4	8	16	32	64	128	256….

Llamando 2 a la base (porque en este caso la progresión geométrica es de razón 2), cada término de la progresión aritmética se denomina **logaritmo** del término correspondiente de la progresión geométrica. Por ejemplo, 4 es el $\log_2 16$ porque la pregunta es: ¿a qué número debo elevar la base 2 para que me de 16?

Definición: el logaritmo de un número en la base **a** es la potencia a la cual debe elevarse **a** para obtener dicho número. La base **a** debe ser un número real positivo y distinto de 1, **c** resulta un número real y **b** debe ser un número real positivo (más adelante se verá por qué):
$\mathbf{a \in R, a > 0 \text{ y } a \neq 1 \;,\; c \in R \;,\; b \in R^+}$

$$\boxed{\log_a b = c \iff a^c = b}$$

La logaritmación es una de las operaciones inversas de la potenciación, tal como se observa en su definición. La otra es la radicación, que también se define utilizando la potenciación: $\sqrt[n]{a} = b \iff b^n = a$

La idea de Napier está gestada, pero… ¿cómo funciona en la práctica el uso de logaritmos para facilitar las cuentas complejas? ¿Cómo opera tan brillante idea?

Veamos primero practicando algunos cálculos:

1. Dados los siguientes cálculos
i) 16 x 512 ii) 81 x 19683 iii) 256 x 262144 iv) 625 x 1953125
a. Resuelve todas las cuentas con el algoritmo convencional (no con calculadora, estamos ambientados hacer 400 años atrás…)

b. Expresa cada uno de los factores como potencias de algún número.
c. Aplica propiedades de la potenciación para avanzar en la resolución.
d. Explica cómo y por qué se podrían haber gestado las tablas de logaritmos.

¿Qué base elegir?
Como no todos los números (en realidad muy pocos) provienen de una potencia determinada, y si así fuera no todos tendrían la misma base, se acordaron dos bases en aquel entonces: la base 10, coherente con nuestro sistema de numeración, con lo cual el logaritmo se denominó **decimal** y su símbolo es *log*, y la otra la base *e* (hemos explicado anteriormente la importancia de este número) y se llamó logaritmo neperiano (en honor a Napier) o natural y su símbolo es *ln*.

2. APROVECHANDO EL GRAFICADOR

a. Grafica las funciones $y = 10^x$ y su inversa $y = \log x$. Comprobar gráficamente que ambas funciones son simétricas respecto a $y = x$ (bisectriz del 1º y 3º cuadrante).
b. Grafica la función $y = k \cdot \log x$, dándole a k distintos valores (positivos y negativos, opuestos uno del otro). Sacar conclusiones de la influencia de k.
c. ¿Cuál es el dominio de esta función? Justificar.
d. ¿Puede ser la base del logaritmo un número negativo? Prueba de graficar para poder justificar la respuesta.
e. Grafica las funciones $y = \log(x-a)$ e $y = \log x + b$, utilizando distintos valores de a y de
f. Explicar qué efecto producen estos dos parámetros (el primero afectado por el logaritmo y el segundo no).
g. Combina estos dos parámetros en una sola función para comprobar la justificación anterior.
h. ¿Qué sucede si la base de la función logarítmica está entre 0 y 1? Grafica varios casos para dar una respuesta.

3. DESCUBRIENDO Y VERIFICANDO PROPIEDADES AL APLICAR LA DEFINICIÓN DE LOGARITMO
Responde:
a. ¿Se puede aplicar el logaritmo a un número negativo? Explicar.
b. ¿Cuál es el logaritmo de 0? ¿Qué ocurre con $\log_0 0$? Explicar.
c. ¿Qué sucede si la base del logaritmo es 1?
d. ¿Bajo qué condiciones es posible la logaritmación?
e. Enunciar y ejemplificar las leyes uniforme y cancelativa para la logaritmación.
f. Completar las siguientes igualdades referentes a las propiedades logaritmo de un producto, de un cociente y de una potencia. Verificarlo con un ejemplo gráficamente:

$\log_a(x \cdot y) = \ldots$
$\log_a(x : y) = \ldots$
$\log_a x^y = \ldots$
$\log_a \sqrt[y]{x}$

¿SE PUEDE CAMBIAR DE BASE?
Sí, se puede cambiar de base. Supongamos que para resolver una determinada situación nos convenga trabajar en una base distinta de 10 o *e* (que son las que aparecen en la calculadora). Entonces se plantea el problema en la base conveniente y luego para hacer los cálculos, se cambia de base (a 10 o *e*) (las propiedades son las mismas). El cambio de base se realiza de la siguiente manera:
Queremos pasar de base a, a otra base b, entonces, decimos que

Por definición $\log_a x = y \iff a^y = x$, aplicando $\log_b$ a ambos miembros
$\log_b a^y = \log_b x$.
Aplicando la propiedad: $y.\log_b a = \log_b x$, despejando $y = \log_b x / \log_b a$
tenemos que

$$\boxed{\log_a x = \log_b x / \log_b a}$$

(El logaritmo de un número en determinada base es el logaritmo en la nueva base de ese número dividido el logaritmo en la nueva base de la base anterior).

Por ejemplo: $\log_7 20 = \log 20/\log 7$

4. DESCUBRIR EL ERROR
Sabemos que:

$$\frac{1}{2} > \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{2} > \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

Como a un número mayor le corresponde un logaritmo mayor (por qué?) tendremos que:

$$\log\left(\frac{1}{2}\right) > \log\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\log\left(\frac{1}{2}\right) > 2.\log\left(\frac{1}{2}\right)$$

Si dividimos ambos miembros por log(1/2) resulta que:
1 > 2 !!!!

¿Dónde está el error de este razonamiento?

5. VOLVIENDO A LOS PRIMEROS PROBLEMAS
Resuelve los primeros problemas de función exponencial en donde aparecen ecuaciones exponenciales y que fueron resueltas en forma aproximada con el uso de la calculadora. Comparar este resultado con el cálculo aproximado.

¿Por la cocina cómo andamos?
¿Cuánto tiempo pasará para volver a tener la misma cantidad de bacterias?
$2\,000\,000 = 2\,000 \cdot 2^X$

Vida media
¿Puede valer cero? $0{,}5 \cdot (1/2)^n = 0$

Cuenta bancaria

¿Cuántos años deben pasar para que se duplique la cantidad de dinero?

$$100 \,.\, (1 + 0{,}05)^t = 200$$

6. ¡A PRACTICAR! (ECUACIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS)

a. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $10 \log_5 x - 5 \log_5 x + 5 = 0$
b) $4 \,.\, 3^x - 4 = 0$
c) $\frac{2 \log_2 x - 3}{3} = 1$
d) $3 \,.\, 4^x + 6 = 0$
e) $(\log_2)^2 x - \log_2 x - 2 = 0$
f) $2 \,.\, 2^x - 9 \,.\, 2^x + 4 = 0$
g) $e^{2x} - e^x - 6 = 0$
h) $3^{x+1} + 3^{x-1} = 130$
i) $2^x - 2^{2-x} = 0$
j) $5 \log x - \log 10 + 1 = 0$
k) $\log_3 x^2 + \log_3 x - 6 = 0$
l) $\log_5 5x + \log_5 x = 3$
m) $\log_9 (x + 1) + \log_9 9 (x + 1) - 2 = 0$
n) $\ln x + \ln x^3 = 8$
o) $\log_2 x + \log_2 4x - 5 = 0$
p) $2^x + 3 \,.\, 2^x - 1 = 0$
q) $5^{x+1} - 5^x = 20$
r) $2^{x+2} + 2^{x+1} + 2^x = 7/2$
s) $10^x + 10^{x+1} = 22$

(Ejercitación extraída de Matemática 4. Nelly Tapia. Págs. 401 y 403)

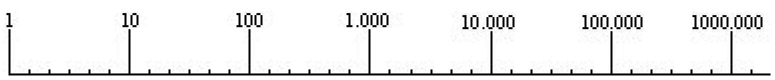
b. Verifica que 50! es aproximadamente $\sqrt{2\pi} \cdot \sqrt{50} \cdot 50^{50} . e^{-50}$ probar con 60!, 62! y generalizar para n (esta fórmula se denomina de Stirling)

ESCALAS LOGARÍTMICAS

Una **escala logarítmica** es una escala de medida que utiliza el logaritmo de una cantidad física en lugar de la propia cantidad.

La escala logarítmica se utiliza cuando los datos o las variables que queremos representar gráficamente tienen un rango de variabilidad muy amplio, como por ejemplo la medición de presión de gas al vacío que puede variar desde 1 atmósfera hasta 10^{-13} – 10^{-15} atmósferas o las distancias siderales en donde pueden aparecer millones de kilómetros (a pesar de que se utilice como unidad el año luz equivalente a 9.46×10^{12} km = 9 460 730 472 580.8 km).Evidentemente si utilizamos escalas lineales o aritméticas se hace imposible representar en un gráfico esta variación. El logaritmo los reduce a un rango más manejable.

Un ejemplo sencillo de escala logarítmica muestra divisiones igualmente espaciadas en los ejes de un gráfico marcadas con 1, 10, 100, 1000, ... en vez de 0, 1, 2, 3, ... (que serían los exponentes de las potencias de 10).



En una escala logarítmica de base 10, las primeras potencias de 10 (1, 10, 100, 1000...) se disponen a intervalos iguales.
Al realizar esta transformación decimos que estamos trabajando en **escala logarítmica.** Si la transformación la realizamos en una sola de las variables (a veces no hace falta cambiar las dos) decimos que estamos utilizando una **escala semilogarítmica.**

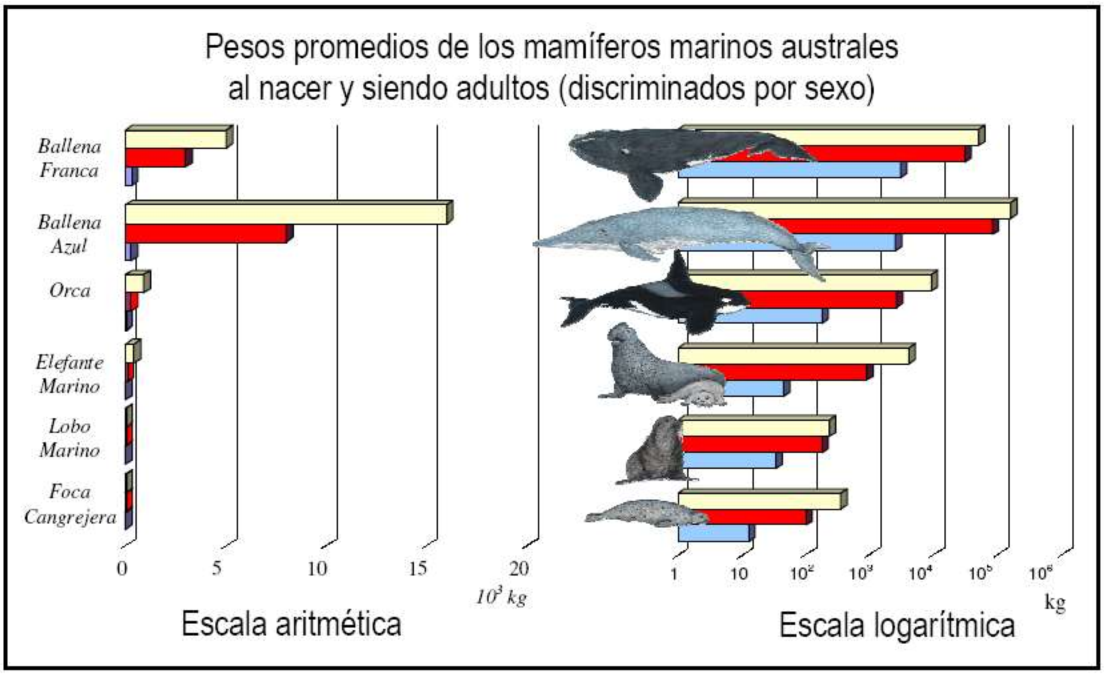
PROBLEMAS EN DONDE ES CONVENIENTE APLICAR ESCALA LOGARÍTMICA

7. EL SISTEMA SOLAR (www.gpdmatematica.ar**)**
Representa gráficamente el tamaño relativo de los planetas de nuestro Sistema Solar, como así también la distancia de ellos al Sol.
Buscar información en la web, Sistema Solar Wikipedia como ejemplo. Se puede buscar información en otras páginas o en biblioteca.

8. ANIMALES GRANDES Y CHICOS
Los pesos de los animales marinos

a. Busca información, en libros e Internet, del peso de los mamíferos marinos más importantes (machos adultos) que surcan las costas de Perú.
b. Representa estos datos en escala aritmética y en escala logarítmica.
c. Analiza la diferencia de ambos gráficos, ventajas y/o desventajas y escribir una conclusión.

Como orientación, después de tabular los datos para organizarse, hacer un gráfico de barras similar al siguiente:



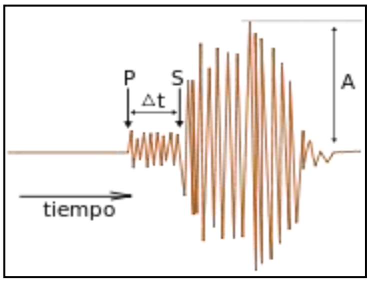
Los animales que aparecen en este gráfico pertenecen a la Patagonia argentina en donde se comparan las escalas logarítmica y aritmética (Abrate y Pochulu, 2007).

9. TERREMOTOS

¿Cómo se miden los terremotos?

Un terremoto o sismo puede medirse según su magnitud (causa) o su intensidad (efecto, violencia con que se siente). Para ello, se utilizan varias escalas; las más comunes son la de Richter y la de Mercalli respectivamente.

La **escala sismológica de Richter** (Charles Richter 1900-1985) , también conocida como **escala de magnitud local** (M_L), permite conocer la energía liberada en el hipocentro o foco, que es aquella zona del interior de la tierra donde se inicia la fractura o ruptura de las rocas, la que se propaga mediante ondas sísmicas.



Como se muestra en la reproducción de un sismograma (fig. de la derecha), las ondas **P** se registran antes que las ondas **S**: el tiempo transcurrido entre ambos instantes es **Δt**. Este valor y el de la amplitud máxima (**A**) de las ondas **S**, le permitieron a Richter calcular la magnitud de un terremoto.

Las ondas P hacen vibrar el medio terrestre en la misma dirección que la del desplazamiento de la onda, son ondas de compresión y expansión. De velocidad de propagación muy rápida (de 5 a 11 km/s), son las primeras en aparecer en un sismograma. A continuación, llegan las llamadas ondas **S**, que hacen vibrar el medio terrestre en sentido perpendicular a la dirección de su desplazamiento. Basándose en estos hechos, Richter desarrolló la siguiente ecuación:

$$M = \log_{10} A(mm) + 3\log_{10}(8\Delta t(s)) - 2.92$$

donde:

A= amplitud de las ondas en milímetros, tomada directamente en el sismograma.

Δt= tiempo en segundos desde el inicio de las ondas **P** al de las ondas **S**.

M= magnitud arbitraria pero constante a terremotos que liberan la misma cantidad de energía.

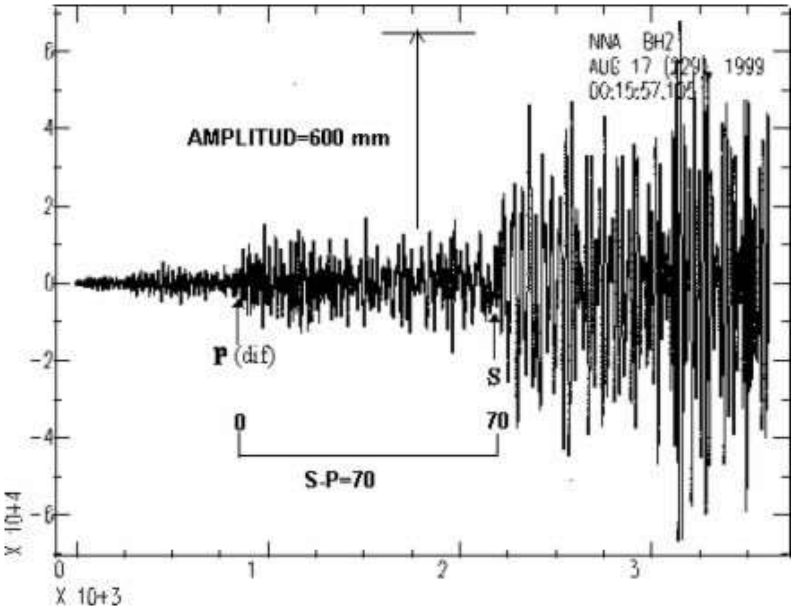
El uso del logaritmo en la escala es para reflejar la energía que se desprende en un terremoto. El logaritmo incorporado a la escala hace que los valores asignados a cada nivel aumenten de forma exponencial, y no de forma lineal. Es decir cuando la amplitud de las ondas varía por un factor de 10, la magnitud del terremoto cambia en una unidad.

a. ¿Cuántas veces más intenso es un sismo de magnitud 7 con respecto a uno de 6? ¿Y con respecto a uno de magnitud 5?

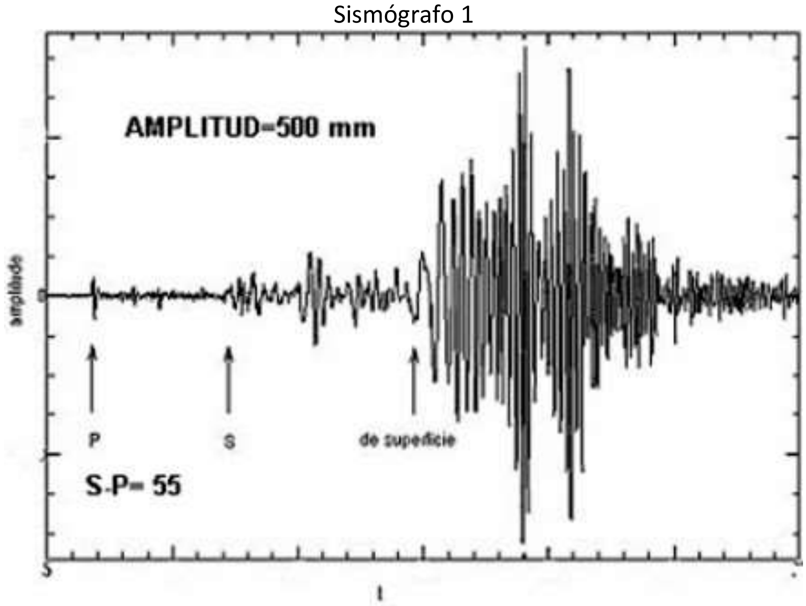
b. Un terremoto similar al de Granada (España-1956) tuvo una amplitud de onda máxima de 23 mm en un tiempo de 24 segundos ¿Cuál fue la magnitud?

c. A continuación se muestran dos sismogramas, uno pertenece al terremoto de Perú (Pisco-2007) que tuvo 600 víctimas y el otro al terremoto de Japón (Hyogo-Kem Nambu-1995) ninguna víctima, sólo daños materiales.

¿A cuál corresponde cada uno de ellos?



Sismógrafo 1



Sismógrafo 2

Información adicional

Clasificación de la escala Richter y su impacto en la superficie:

- **Menos de 3.9:** Generalmente no se percibe
- **De 4 a 4.9:** Perceptibles a menudo, pero con daños poco probables
- **De 5 a 5.9:** Se percibe, pero solo causa daños menores; en edificios antiguos sí pueden ser daños graves
- **De 6.0 a 6.9:** Puede ocasionar daños severos en áreas pobladas en 160 kilómetros a la redonda
- **De 7.0 a 7.9:** Terremoto mayor. Puede causar serios daños en muchas zonas y suele haber unos 18 por año.
- **De 8.0 a 8.9:** Se trata de un gran terremoto que puede causar graves daños en zonas de varios cientos de kilómetros. Se producen de 1 a 3 por año.

- **De 9 a 9.9:** Son terremotos devastadores en varios miles de kilómetros. Se producen 1 o 2 cada 20 años.
- **De 10 o más:** Aún no se ha registrado ninguno. Sus consecuencias serían épicas.

10. EL PH

El carácter ácido, básico o neutro de las disoluciones

Para indicar el nivel de acidez de una sustancia, solemos hablar del pH. Si bien esta expresión es universalmente utilizada, la misma alude al potencial de hidrógeno (pH) que tiene una sustancia. En disoluciones diluidas en lugar de utilizar la actividad del ion hidrógeno, se la puede aproximar utilizando la concentración molar del ion hidrógeno (por ejemplo una concentración de $\left[H+\right]=1\times10^{-7}M$). Expresar concentraciones de iones con exponente negativo resulta en la práctica incómodo; por esta razón en el año 1909, el químico danés Soren Peter Lauritz Sorensen introdujo el concepto de pH, como el logaritmo decimal del inverso de la concentración de iones expresada en moles/litro. Esto es $pH=\log\left(1/H^{+}\right)$.

a. Aplicando ahora el logaritmo de un cociente, la expresión anterior puede escribirse…
b. Recordando que el valor del pH es un logaritmo de base 10, ¿cuál es la relación entre un pH = 9 y un pH = 8? ¿Cuántas veces más ácido es un pH =5 respecto de un pH = 7?

Si el agua es ligeramente ácida con pH entre 7,0 y 6,8 la mayoría de los peces de río lograrían vivir en ella. Si el pH es menor que 6,8 no son muchos los peces que viven en este tipo de agua. Sin embargo, los seres que habitan grandes lagos y los animales marinos son prácticamente inflexibles en su relación con el pH debido a la gran estabilidad de los parámetros químicos en sus aguas de origen.
c. ¿qué pH tiene el agua en un acuario? Si alguien nos responde "Aproximadamente entre 6 y 7" ¿qué nos dice esta respuesta respecto del aficionado que la respondió?

POSIBLES SOLUCIONES Y COMENTARIOS PARA EL DOCENTE

1. *Se les hace resolver a los estudiantes las multiplicaciones con el algoritmo convencional para que puedan apreciar las ventajas (hace 400 años) del uso de logaritmos en las operaciones y la importancia de su descubrimiento.*

Luego, expresar cada factor como potencia y aplicar las propiedades de la potenciación, por ejemplo, $16 \times 512 = 2^4 \times 2^9 = 2^{13}$
Se podría pensar que como los logaritmos son los exponentes: $\log_2 16 = 4$ *y* $\log_2 512 = 9$*, al aplicar las propiedades de la potenciación, si multiplicamos dos elementos de la progresión geométrica en la tabla (logaritmos) le va a corresponden la suma de los elementos correspondientes en la progresión aritmética (potencias). En este caso sería* 2^{13}*. Si estas potencias están tabuladas, el problema de multiplicación se reduce a un problema de suma.*

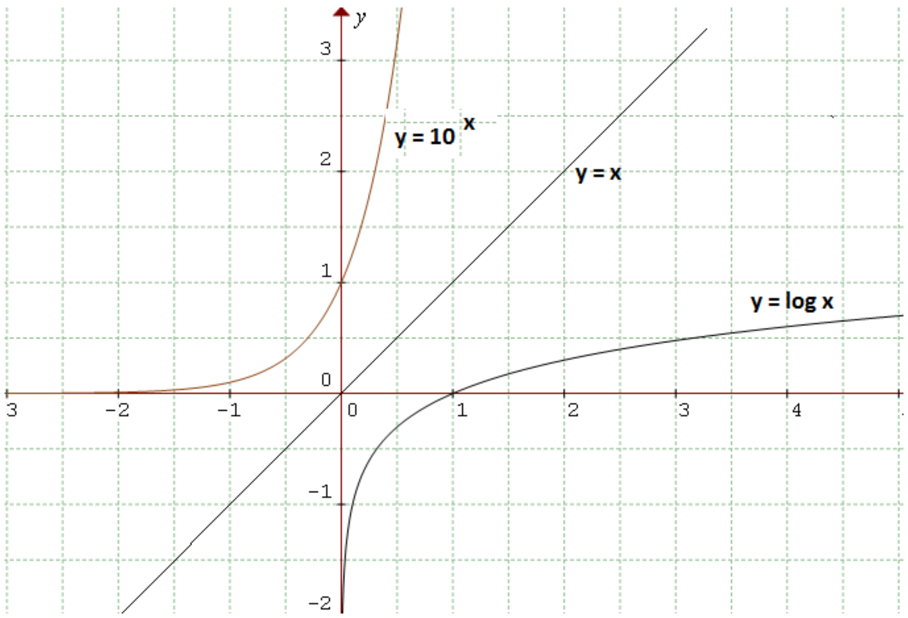
aritmética	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
geométrica	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	**8192**

También se puede observar que si sumamos las potencias en la progresión aritmética (4 + 9 = 13) sus correspondientes valores en la progresión geométrica se multiplican (16 . 512 = 8192).

Análogamente, una división se transforma en resta. Como consecuencia una potencia se transforma en producto.

Hoy en día las tablas de logaritmos fueron reemplazadas por calculadoras científicas y computadoras para hacer cálculos muy complejos, pero estas "tablas" siguen existiendo dentro de los softwares. Sin embargo, si bien los cálculos complicados los puede hacer la máquina, para poder resolver ecuaciones exponenciales en general hay que recurrir a los logaritmos.

2. APROVECHANDO EL GRAFICADOR

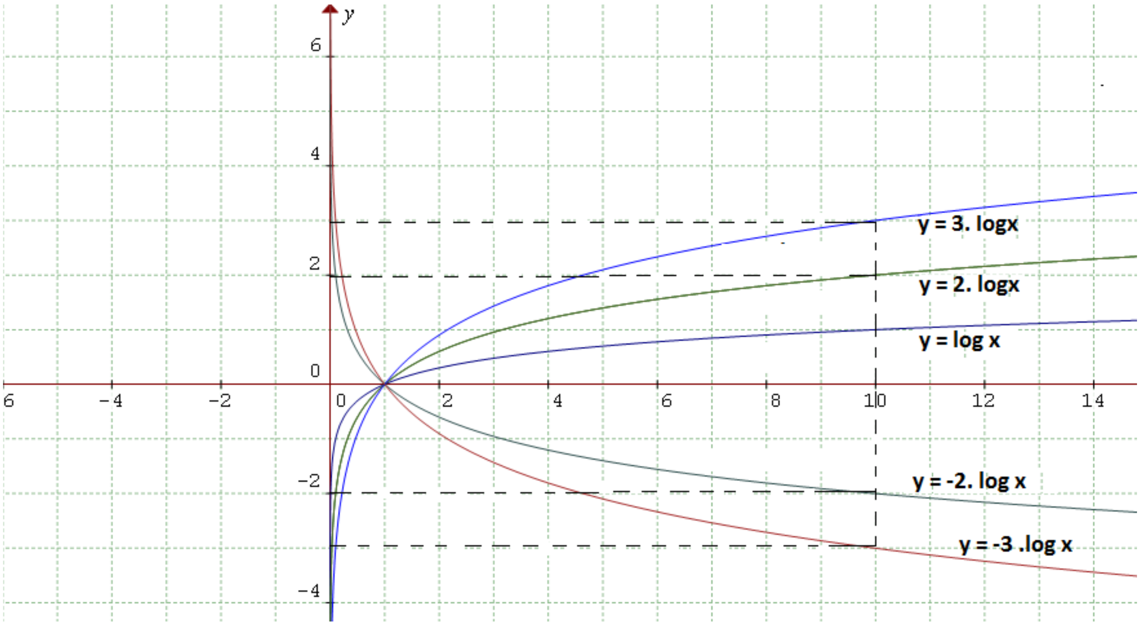


Estos son los gráficos de la función y = log x y su inversa $y = 10^x$.

Vemos la simetría de las dos funciones con respecto a la función y = x.

Ahora le agregamos un parámetro k que multiplica a la función.

Los parámetros k opuestos hacen que las funciones sean simétricas con respecto al eje de abscisas. También se puede observar que el valor (10, k) pertenece a la función y = k.log x (esto es porque la base es 10, si fuera n pasaría por (n,k).

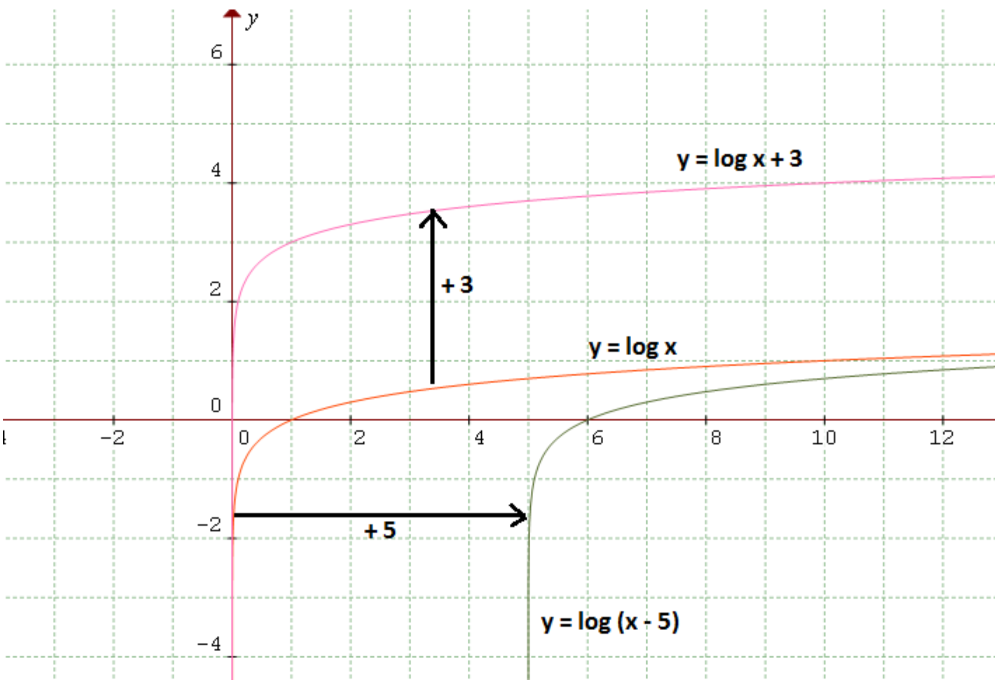


Se pueden ir haciendo otras observaciones, como por ejemplo que el dominio de estas funciones son los números reales positivos dado que las bases de los logaritmos son números positivos, por lo tanto, cualquiera sea el exponente al cual se la eleve, el resultado va a ser positivo (ver definición). La base de la función logarítmica debe ser positiva (distinta de 1) porque si fuera negativa dependería de la paridad a la cual hay que elevar la base que nos conduciría a valores positivos y negativos en forma alternada.

Que los alumnos grafiquen alguna función logarítmica con base negativa para ver qué pasa. Recordar lo que pasa con la función exponencial si la base es negativa. La base debe ser distinta de 1 porque no sería una función, ya que el único valor del dominio sería 1 para infinitos valores de la “imagen”.

El análisis de estos comportamientos servirá más adelante para darle significado a las propiedades de los logaritmos.

Lo mismo que cualquier otra función, se pueden producir desplazamientos horizontales y verticales. Si se resta el parámetro a la variable independiente resulta un desplazamiento horizontal y si se suma a la expresión total hay un desplazamiento vertical (ambos parámetros son números reales).



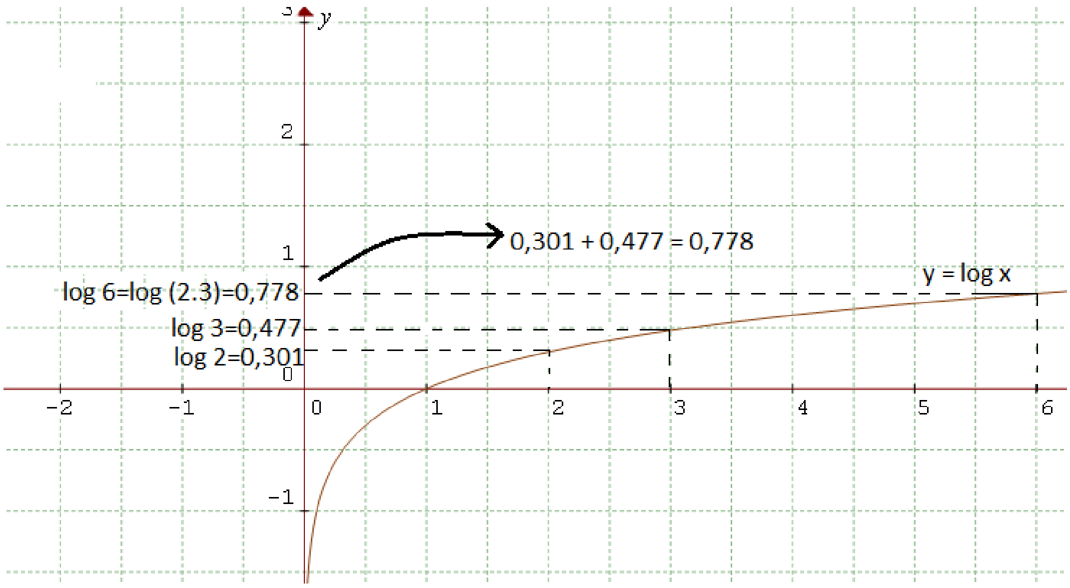
Se les

puede pedir a los alumnos que grafiquen otras variaciones de la función logaritmo, como por ejemplo ver qué pasa si la base del mismo está entre cero y uno.

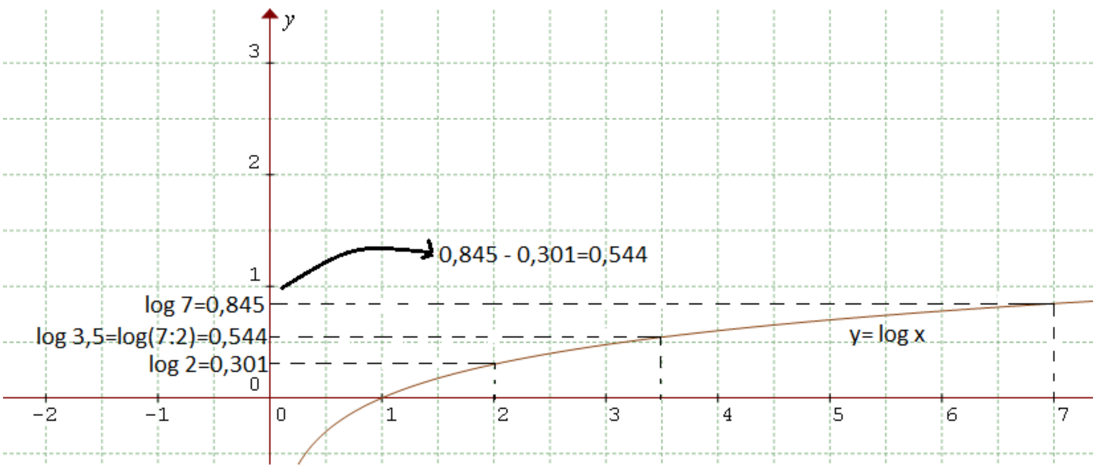
Se sugiere aprovechar esta instancia para analizar crecimiento, dominio, rango, asíntotas, intersecciones con los ejes.

3. Propiedades de los logaritmos

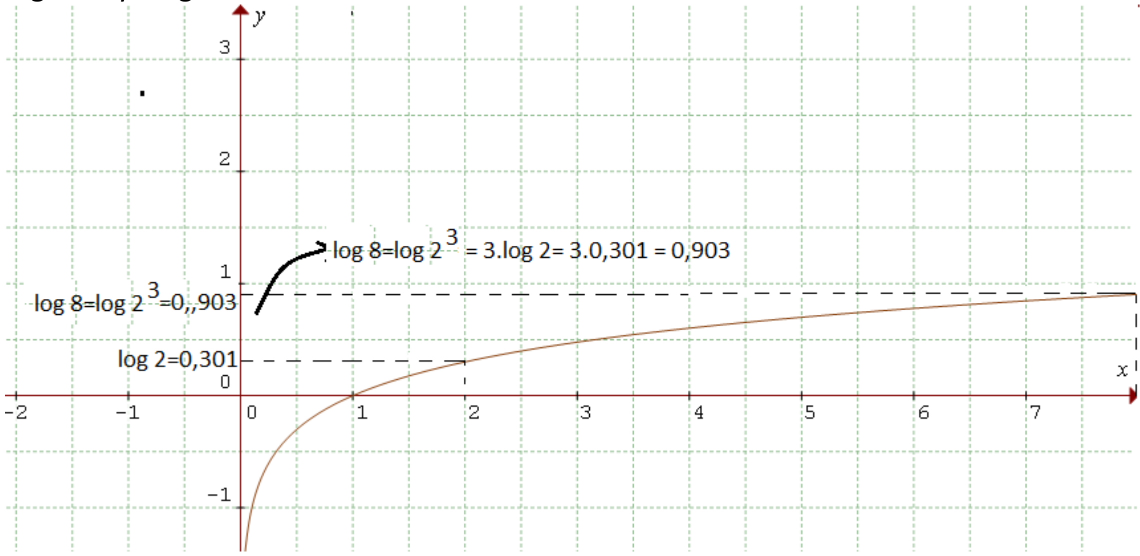
- Aplicando la definición, como la base de un logaritmo es positiva, ningún número positivo elevado a una potencia (ya sea positiva o negativa) da como resultado un número negativo.
- Ningún número elevado a una potencia da cero. Si la base es cero, podría dar cero, pero… ¿cuál sería la solución? No tendría una solución, tendría infinitas, porque 0 elevado a cualquier potencia es cero, con lo cual el resultado podría ser cualquier número. Por lo tanto la base no puede ser cero.
- Tampoco la base puede ser 1 porque 1 elevado a cualquier potencia da como resultado 1, salvo que sea $\log_1 1$, pero como se trata de un caso particular, la base debe ser distinta de 1.
- Base a ϵ R con a > 0 y a ≠ 1, logaritmo c ϵ R, el número b al que se aplica el logaritmo ϵ R^+ .
- Ley uniforme y cancelativa: x = y ⇔ $\log_a x = \log_a y$
- $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$



$\text{Log}_a (x:y) = \log_a x – \log_a y$



$\log_a x^y = y \cdot \log_a x$



Teniendo en cuenta que $\sqrt[y]{x} = (x)^{\frac{1}{y}}$, y aplicando la propiedad del logaritmo de una potencia se tiene que $\log_a \sqrt[y]{x} = \left(\frac{1}{y}\right) . \log_a x$.

4. DESCUBRIR EL ERROR

Como log (1/2) es un número negativo, al dividir ambos miembros de una desigualdad por un número negativo, el signo de la desigualdad se invierte.

5. VOLVIENDO A LOS PRIMEROS PROBLEMAS

Les pedimos a los alumnos que ahora, con las herramientas que adquirieron, vuelvan a los problemas iniciales de función exponencial, que fueran resueltos aproximando con la calculadora. Se trata de aplicar la ley uniforme (logaritmo a ambos miembros) para poder "bajar" los exponentes (que son las incógnitas) y así poder despejar la ecuación.

- 2 000 000 = 2 000 . 2^x ⇔ 1 000 = 2^x ⇔log 1 000 = x . log 2 ⇔ 3 = x . 0,301 ⇔ x = **9,96** (número de períodos).
- 0,5 . $(1/2)^n$ = 0 ⇔$(1/2)^n$ = 0 ⇔ n . log (1/2) = log 0 . No puede valer cero porque el logaritmo de cero no existe (ver el gráfico).
- 100 . $(1 + 0,05)^t$ = 200 ⇔ $(1 + 0,05)^t$ = 2 ⇔t . log 1,05 = log 2 ⇔ t = 0,301/0,021 = **14,33** (años). Luego analizar si es 14 o 15 años el resultado.

6. ECUACIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS ¡A PRACTICAR!

No todas las ecuaciones exponenciales o logarítmicas se resuelven de la misma manera, de ahí su importancia de practicar para adquirir habilidad en el descubrimiento de distintas estrategias en cada caso. Por ejemplo:

a) $10 \cdot \log_5 x - 5 \cdot \log_5 x + 5 = 0$

En este caso "molesta" la resta en los logaritmos. Si despejamos lo que resta tampoco podemos aplicar la ley cancelativa por la suma de la constante 5. Entonces se puede sacar factor común $\log_5 x$:

$\log_5 x \cdot (10 - 5) = -5$

$\log_5 x = -1 \Rightarrow$ **$x = 1/5$**

Como todas las ecuaciones, se tiene la ventaja de poder comprobar el resultado reemplazando la x en la ecuación original por su valor, y ver que la igualdad se cumple.

f) $2 \cdot 2^x - 9 \cdot 2^x + 4 = 0$

Utilizamos la misma estrategia sacando factor común 2^x, pero luego aplicamos logaritmo a ambos miembros para poder "bajar" el exponente (incógnita) y poder despejar. Podemos elegir por comodidad cualquiera de los dos logaritmos que están en la calculadora (natural o decimal):

$2 \cdot 2^x - 9 \cdot 2^x + 4 = 0 \Rightarrow 2^x \cdot (-7) = -4 \Rightarrow 2^x = 4/7$

Como 4/7 no es potencia exacta de 2, debemos aplicar logaritmo a ambos miembros:

$x \cdot \log 2 = \log (4/7) \Rightarrow x = -0,243/0,301 =$ **$-0,807355$**

g) $e^{2x} - e^x - 6 = 0$

Teniendo en cuenta que $e^{2x} = (e^x)^2$, estamos en presencia de una ecuación de segundo grado. Hay que hacer un cambio de variable y se resuelve como ya sabemos. Llamemos $e^x = y$, nos queda que $y^2 - y - 6 = 0$.

Resolviendo con la fórmula de Bashkara resulta: $y_1 = 3$; $y_2 = -2$.

Pero como nuestro objetivo es conocer el valor de x, volvemos a la sustitución y tenemos que $y = e^x = 3 \Rightarrow x \cdot \ln e = \ln 3 \Rightarrow x \cdot 1 = \ln 3 \Rightarrow$ **$x_1 = 1,0986$** para y_1

$y = e^x = -2 \Rightarrow x \cdot \ln e = \ln (-2) \Rightarrow$ **$x_2 = \ln (-2)$**

x_2 no es solución dentro del conjunto de los números reales ya que es el logaritmo de un número negativo.

h) $3^{x+1} + 3^{x-1} = 130$

Siempre que aparecen sumas y restas parece que se complica la situación, pero apliquemos propiedades de la potenciación y podemos transformar las sumas de los exponentes en productos, y luego vemos…

$3^{x+1} + 3^{x-1} = 130 \Rightarrow 3^x \cdot 3 + 3^x/3 = 130 \Rightarrow 3^x \cdot (3 + 1/3) = 130 \Rightarrow 3^x = 130 : 10/3 \Rightarrow 3^x = 39$

Aplicando logaritmo para despejar x : $x \cdot \log 3 = \log 39 \Rightarrow$ **$x = 3,33$**

i) $2^x - 2^{2-x} = 0$

Aplicando propiedades de la potenciación: $2^x - 2^2/2^x = 0$

Sacando común denominador: $(2^{2x} - 4)/2^x = 0 \Rightarrow 2^{2x} = 4$

Si llamamos $2^x = u$ tenemos que $u^2 = 4$, $\Rightarrow u^2 - 4 = 0$ y en consecuencia

$u_1 = 2$ y $u_2 = -2$, de modo que $2^x = \pm 2$. Una solución es $x = 1$ (cuando $2^x = 2$); la otra no es un número real porque es el logaritmo de un número negativo ($2^x = -2$, aplicando logaritmo a ambos miembros y despejando resulta $x = \log(-2) / \log 2$).

k) $\log_3 x^2 + \log_3 x - 6 = 0$
Aplicando propiedades de logaritmos: $\log_3 (x^2 . x) - 6 = 0 \Rightarrow \log_3 x^3 = 6 \Rightarrow 3 . \log_3 x = 6 \Rightarrow \log_3 x = 2 \Rightarrow$ **$x = 9$**

m) $\log_9 (x + 1) + \log_9 9.(x + 1) - 2 = 0$

Aplicando propiedades de logaritmos:
$\log_9 [(x + 1) . 9 . (x + 1)] = 2 \Rightarrow 9^2 = 9 . (x + 1)^2 \Rightarrow 9 = (x + 1)^2 \Rightarrow (x + 1) = +/-3 \Rightarrow$ **$x = -4$** ó **$x = 2$**.

Otra forma de resolver:
$\log_9[9.(x+1)^2] = 2 = \log_9 81; \Rightarrow (x+1)^2 = 81/9; \Rightarrow x+1 = \pm 3; \Rightarrow x = \pm 3 - 1; \Rightarrow x_1 = -4; x_2=2$

q) $3^{2x} + 9^x = 162$
En este caso se trata de transformar el segundo sumando en una potencia de base tres, para que sea semejante a la otra (digamos que igual) y que se puedan sumar:
$3^{2x} + 9^x = 162 \Rightarrow 3^{2x} + (3^2)^x = 162 \Rightarrow 2 . 3^{2x} = 162 \Rightarrow 3^{2x} = 81 \Rightarrow 3^{2x} = 3^4 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow$ **$x = 2$.**

PROBLEMAS EN DONDE ES CONVENIENTE APLICAR ESCALA LOGARÍTMICA

7. EL SISTEMA SOLAR

Las representaciones que aparecen en los libros del Sistema Solar no son a escala. Si así fuera, dibujando a Júpiter con un diámetro de 12 cm (para que entre cómodamente en una hoja de carpeta) habría que dibujar el Sol a 653 metros de distancia (comprobarlo) para respetar las distancias en escala.
A continuación se aportan datos que pueden servir para responder al problema. Fueron extraídos de Wikipedia, pero se pueden usar otras fuentes de información.

Para tener una noción de la dimensión astronómica de las distancias en el espacio, es interesante hacer (o imaginar) un modelo a escala que permita tener una percepción más clara del mismo. Imagínese un modelo reducido en el que el Sol esté representado por una pelota de fútbol (de 220 mm de diámetro). A esa escala, la Tierra estaría a 23,6 m de distancia y sería una esfera con apenas 2 mm de diámetro (la Luna estaría a unos 5 cm de la tierra y tendría un diámetro de unos 0,5 mm). Júpiter y Saturno serían bolitas con cerca de 2 cm de diámetro, a 108 y a 226 m del Sol respectivamente. Plutón estaría a 931 m del Sol, con cerca de 0,3 mm de diámetro. En cuanto la estrella más próxima (Próxima Centauri) estaría a 6.332 km del Sol, y la estrella Sirio a 13.150 km ¡en el modelo!

Si se tardase 1 h y cuarto en ir de la Tierra a la Luna (a unos 257.000 km/h), se tardaría unas 3 semanas (terrestres) en ir de la Tierra al Sol, unos 3 meses en ir a Júpiter, 7 meses a Saturno y unos 2 años y medio en llegar a Plutón y dejar nuestro sistema solar. A partir de ahí, a esa velocidad, tendríamos que esperar unos 17.600 años hasta llegar a la estrella más próxima, y 35.000 años hasta llegar a Sirio.

Con este modelo a escala se puede ver fácilmente que no se puede representar el Sistema Solar en una hoja de manual o carpeta, tampoco hacer una maqueta dentro de un laboratorio.

Algunos datos de los planetas

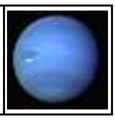
El 24 de agosto de 2006, en Praga, en la XXVI Asamblea General la Unión Astronómica Internacional (UAI), se excluyó a Plutón como planeta del Sistema Solar. Tras una larga controversia sobre esta resolución, se tomó la decisión por unanimidad. Con esto se reconoce el error de haber otorgado la categoría de planeta a Plutón en 1930, año de su descubrimiento. Desde ese día el Sistema Solar queda compuesto por 8 planetas.

Los 8 planetas del Sistema Solar, de acuerdo con su cercanía al Sol, son: Mercurio, Venus, Tierra, Marte, Júpiter, Saturno, Urano y Neptuno. Los planetas son astros que describen trayectorias llamadas órbitas al girar alrededor del Sol.

A Saturno, Júpiter, Urano y Neptuno los científicos los han denominado planetas gaseosos por contener en sus atmósferas gases como el helio, el hidrógeno y el metano, sin saber a ciencia cierta la estructura de su superficie.

Características principales de los planetas del Sistema Solar (son datos relativos a la Tierra)

Planeta	Diámetro ecuatorial	Masa	Radio orbital(UA)	Periodo orbital (años)	Periodo de rotación (días)	Satélites naturales	Imagen
Mercurio	0,382	0,06	0,38	0,241	58,6	0	
Venus	0,949	0,82	0,72	0,615	243	0	
Tierra*	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1	
Marte	0,53	0,11	1,52	1,88	1,03	2	
Júpiter	11,2	318	5,20	11,86	0,414	63	
Saturno	9,41	95	9,55	29,46	0,426	61	
Urano	3,98	14,6	19,22	84,01	0,718	27	

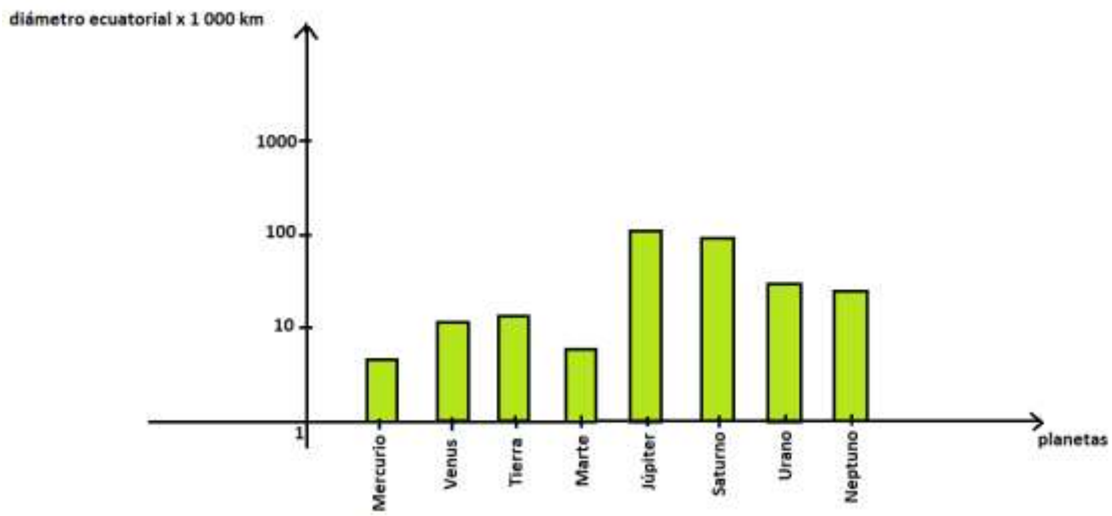
Neptuno	3,81	17,2	30,06	164,79	0,671	13	

Características físicas de la Tierra:

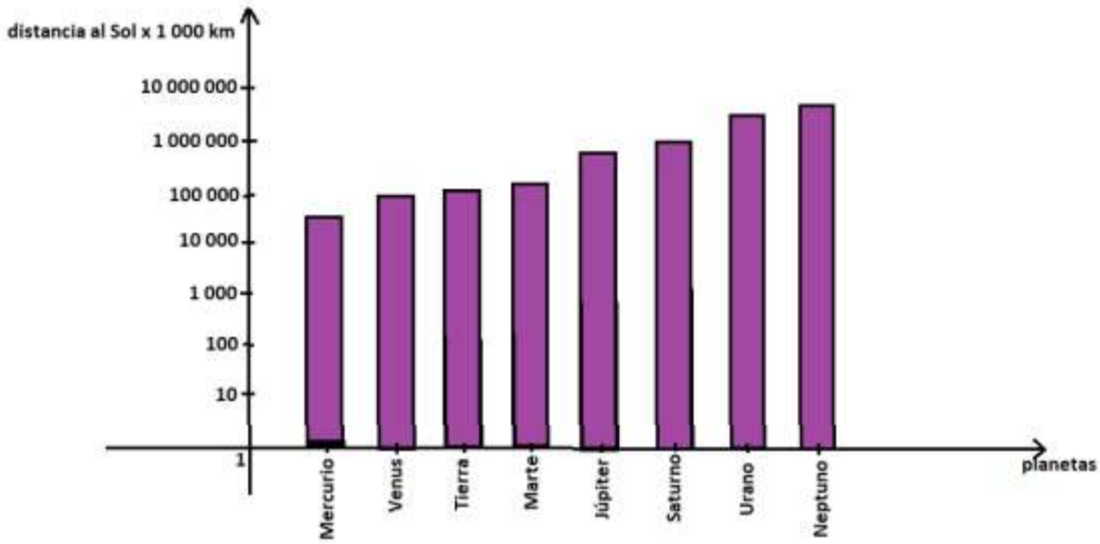
Masa	$5{,}9736\times10^{24}$ kg[1]
Volumen	$1{,}08321\times10^{12}$ km^3[1]
Densidad	5,515 g/cm^3[1]
Área de superficie	510 072 000 km^2[6][7][nota 5] 148 940 000 km^2 tierra (29,2 %) 361 132 000 km^2 agua (70,8 %)
Radio	Ecuatorial: 6378,1 km[8][9] Polar: 6356,8 km[10] Medio: 6371,0 km[11]
Gravedad	9,780327 m/s^2
Periodo de rotación	0,99726968 d[12] $23^h\ 56^m\ 4.100^s$
Inclinación axial	23°26'21" 0,4119[4]

Con toda esta información, vamos a realizar una representación gráfica para poder poner en un mismo gráfico todos los datos de un mismo atributo, por ejemplo, el diámetro ecuatorial de los planetas o sus distancias al Sol. Para ello vamos a tabular los datos y hacer un gráfico cualitativo-cuantitativo en escala semi-logarítmica:

planetas	Diámetro ecuatorial (km)	Distancia al Sol (km)
Mercurio	4 872,87	57 910 000
Venus	12 105,63	108 200 000
Tierra	12 756,2	146 600 000
Marte	6 760,78	227 940 000
Júpiter	142 869,44	778 330 000
Saturno	120 035,84	1 429 400 000
Urano	50 769,67	2 870 990 000
Neptuno	48 601,12	4 504 300 000

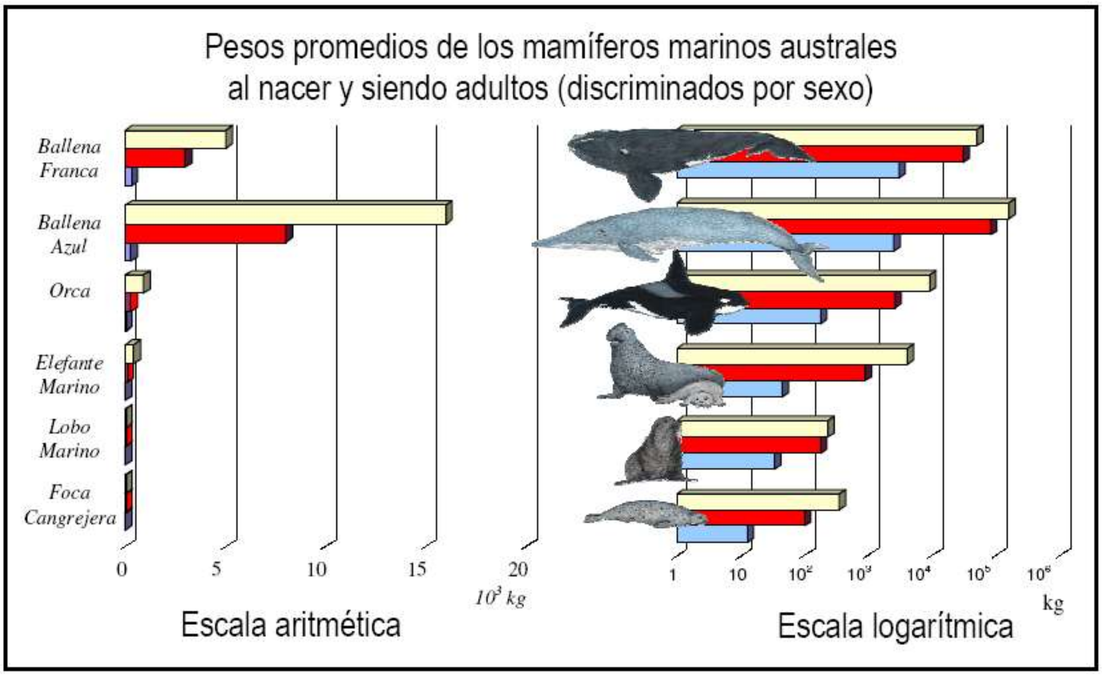


Observar el rango de los datos en la segunda columna. Vamos a necesitar que nuestra escala logarítmica llegue hasta 10 millones.
Como se podrá ver, si intentáramos graficar en una escala aritmética sería imposible: o no nos alcanzaría la hoja o los valores menores no se percibirían.
Los alumnos deben tener presente que el logaritmo no es lineal, entonces para ubicar los valores intermedios no se puede hacer en forma proporcional. Por ejemplo el 5 no está en el punto medio del primer intervalo. Lo que se puede hacer es: hacer corresponder a cada valor de la escala logarítmica la escala aritmética (por ejemplo al 100 hacerle corresponder el 2). Entonces al valor que tenemos que graficar le aplicamos el logaritmo y vamos a saber dónde ubicarlo. Por ejemplo, el primer valor de Mercurio es 57 810, log 57 810 = 4,76. Este valor va a estar ubicado entre 10 000 (que corresponde al 4) y 100 000 (que corresponde al 5), en las ¾ partes aproximadamente de ese intervalo.



8. ANIMALES GRANDES Y CHICOS

En las costas marinas de Perú hay 33 especies de mamíferos marinos, desde las nutrias hasta las ballenas, pasando por lobos marino, pingüinos, delfines y otros.
Los alumnos pueden tabular los datos para organizarse y luego hacer un gráfico de barras similar al siguiente:



Los animales que aparecen en este gráfico pertenecen a la Patagonia argentina en donde se comparan las escalas logarítmica y aritmética (Abrate y Pochulu, 2007).

No es difícil darse cuenta que en la escala aritmética se pierde información de los animales más chicos. Si hiciéramos un gráfico con una escala mayor para que éstos se vean bien, las barras de los animales más grandes no entrarían en la hoja.

9. TERREMOTOS

Para demostrar que cuando los valores de la escala varían en una unidad, la magnitud del terremoto varía 10 veces, aplicamos la fórmula de Richter y las propiedades de los logaritmos, y haciendo algunos cálculos llegamos a esa conclusión. Si la variación es de 2 unidades, la magnitud del terremoto varía en 100 unidades. Veamos:

$7 = \log_{10} (A \cdot 8\ \Delta t^3) - 2{,}92$

$6 = \log_{10} (A \cdot 8\ \Delta t^3) - 2{,}92$

$5 = \log_{10} (A \cdot 8\ \Delta t^3) - 2{,}92$

Despejando:

$4{,}08 = \log_{10} (A \cdot 8\ \Delta t^3)$

$3{,}08 = \log_{10} (A \cdot 8\ \Delta t^3)$

$2{,}08 = \log_{10} (A \cdot 8\ \Delta t^3)$

Aplicando la definición de logaritmo:

$10^{4,08} = (A \cdot 8\ \Delta t^3) = 12\ 022{,}64 = 10 \times 1\ 202{,}26$

$10^{3,08} = (A \cdot 8\ \Delta t^3) = 1\ 202{,}26 = 10 \times 120{,}22$
$10^{2,08} = (A \cdot 8\ \Delta t^3) = 120{,}22$
De esta manera se pueden comparar las magnitudes y ver que entre dos de ellas consecutivas la mayor es 10 veces la otra.

En el siguiente problema se trata simplemente de reemplazar la fórmula: $M = \log_{10} (A \cdot 8\ \Delta t^3) - 2{,}92 = \log (23 \cdot 8 \cdot 24^3) - 2{,}92 =$ **3,48**

En el problema de los sismogramas, calculemos la magnitud del terremoto en cada caso: $M_1 = \log (600 \cdot 8 \cdot 70^3) - 2{,}92 =$ **6,3** y $M_2 = \log (500 \cdot 8 \cdot 55^3) - 2{,}92 =$ **5,9**
Podemos suponer que el de Perú es el primer sismograma ya que su magnitud es bastante mayor (teniendo en cuenta la cantidad de víctimas).

Información adicional
Clasificación de la escala Richter y su impacto en la superficie:

- ***Menos de 3.9:*** *Generalmente no se percibe*
- ***De 4 a 4.9:*** *Perceptibles a menudo, pero con daños poco probables*
- ***De 5 a 5.9:*** *Se percibe, pero solo causa daños menores; en edificios antiguos sí pueden ser daños graves*
- ***De 6.0 a 6.9:*** *Puede ocasionar daños severos en áreas pobladas en 160 kilómetros a la redonda*
- ***De 7.0 a 7.9:*** *Terremoto mayor. Puede causar serios daños en muchas zonas y suele haber unos 18 por año.*
- ***De 8.0 a 8.9:*** *Se trata de un gran terremoto que puede causar graves daños en zonas de varios cientos de kilómetros. Se producen de 1 a 3 por año.*
- ***De 9 a 9.9:*** *Son terremotos devastadores en varios miles de kilómetros. Se producen 1 o 2 cada 20 años.*
- ***De 10 o más:*** *Aún no se ha registrado ninguno. Sus consecuencias serían épicas.*

Teniendo en cuenta que los terremotos comenzaron a medirse a partir del siglo XX, ***el terremoto de mayor magnitud de la historia fue el registrado en Valdivia, Chile, en 1960****. El sismo fue de magnitud 9.5. Hubo 2.000.000 de damnificados y Valdivia se hundió 4 metros bajo el nivel del mar, produciéndose además la erupción del volcán Puyehue. Este terremoto tuvo repercusión del lado argentino de la cordillera, específicamente en San Carlos de Bariloche donde se abrió una grieta en el Lago Nahuel Huapi produciendo el destrozo del muelle con un saldo de 2 muertos. Los movimientos telúricos se sintieron en toda la ciudad.*

10. EL PH

Aplicando las propiedades de los logaritmos: $pH = \log (1/H^+) = \log 1 - \log H^+ = -\log H^+$.

Cuando comparamos la escala aritmética con la logarítmica, por cada valor que variamos en la aritmética, se varía 10 veces en la logarítmica. Entonces un pH = 9 es 10 veces más alcalino que un pH = 8 (o 10 veces menos ácido, que es lo mismo). Un pH = 5 es 100 veces más ácido que un pH de 7.

La respuesta del aficionado no es correcta. Si el agua es ligeramente ácida, con pH entre 7,0 y 6,8 la mayoría de los peces de río lograrían vivir en ella. Si el pH es menor de 6,8 no son muchos los peces que viven en este tipo de agua.

BIBLIOGRAFIA:

- Aique matemática 4
- Kaczor y otros (1999): Matemática 1. Ed. Santillana
- Kasner, E. y Newman, J. (1985): Matemática e Imaginación. Ed. Hyspamérica.
- Tapia, Nelly V. de (1983): TAPIA 4. Ed. Estrada.
- Wikipedia: escala logarítmica, Sistema Solar, mamíferos marino de Perú.

-Abrate, R. y Pochulu, M. (2007): Experiencias, propuestas y reflexiones para la clase de Matemática. Capítulo 6: "Los logaritmos, un abordaje desde la Historia de la Matemática y las aplicaciones actuales". Universidad Nacional de Villa María.

-COU es.wikipedia.org/wiki/curva_del_olvido . www.elartedelamemoria.org

-Escala sismológica de Richter- http://es.wikipedia.org/wiki http://es.wikipedia.org/wiki/Terremoto_de_Chile_de_2010

-http://www.biodisol.com/medio-ambiente/magnitud-sísmica-escala Fuente: Universidad de Granada (www.ugr.es).

http:7e-ducativa.catedu.es

-Registro de dos semanas de sismos en la zona de Chile (Taringa) http://www.iris.edu/seismon/zoom/events/?lon=-71.82&lat=-34.22

-Tony Crilly. (2014): 50 cosas que hay que saber sobre matemáticas. Editorial Ariel. Barcelona 2009. Paidós. Buenos Aires