ANIMALES COLORIDOS

Contenidos: área, relación entre áreas, porcentaje, razón

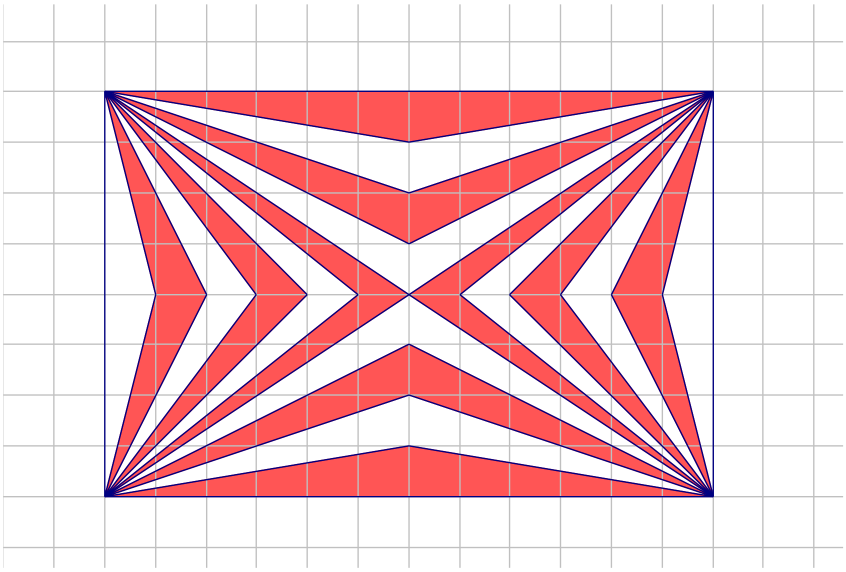
Adriana Rabino

1. ¿Cuánto hay de cada color aproximadamente en cada uno de estos animales? ¿Cómo lo podrías calcular? ¿Se calcula en términos de cantidad o de relación al total? (porcentaje o razón)

2. La cebra, ¿es blanca con rayas negras o negra con rayas blancas?

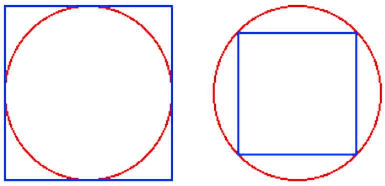
¿Qué porcentaje aproximado hay de cada color?

3. Solo mirando la figura, ¿podrías calcular el valor el área sombreada en relación con el área total del rectángulo? Explica tu razonamiento.



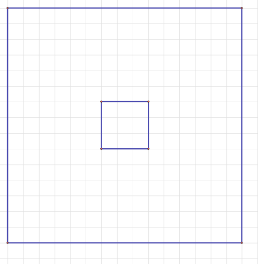
4. El que cabe mejor

¿Qué se ajusta mejor: una clavija cuadrada en un agujero redondo, o una clavija redonda en un agujero cuadrado? Para ser más preciso, si tomas un círculo y lo ajustas dentro de un cuadrado y tomas un cuadrado y lo ajustas dentro de un círculo, ¿cuál deja menos espacio *proporcionalmente*?



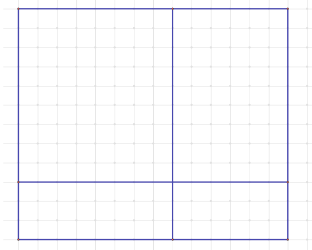
5. Cuadrados dentro de un cuadrado

Del centro de un patio cuadrado cubierto de 15x15 baldosas cuadradas, se quita un cuadrado de 3x3 baldosas. De las baldosas que quedan, ¿cuántos cuadrados de 2x2 (que son unión de 4 baldosas) quedan?



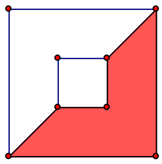
6. Rectángulos

Explorar la relación entre las áreas en la siguiente figura:



Construir otra figura de tal manera que tenga la misma relación entre las áreas de la figura anterior.

7. Fracción sombreada

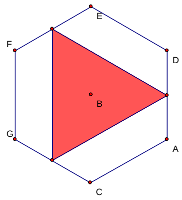


El diagrama que sigue muestra dos cuadrados, cuyos lados miden 1 y 3 unidades, y tienen el mismo centro y los lados correspondientes son paralelos. ¿Qué fracción del cuadrado más grande está sombreada?

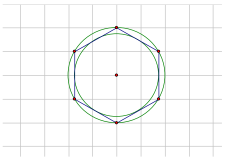
UN POQUITO MÁS DIFÍCIL…

8. Triángulo dentro de un hexágono

El diagrama que sigue muestra un triángulo equilátero con sus vértices en los puntos medios de los lados alternados de un hexágono regular. ¿Qué fracción del área del hexágono está sombreada?



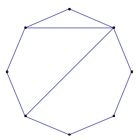
9. Dos hexágonos regulares



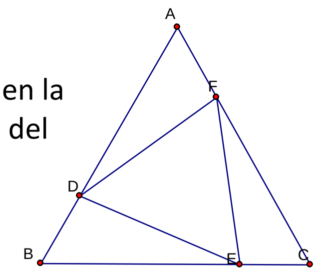
Encontrar la razón entre las áreas de los hexágonos inscripto y circunscripto en el mismo círculo.

10. Diagonales de un octógono

En un octógono regular, ¿cuál es la relación entre las longitudes de su diagonal mayor y su diagonal menor?



11. El triángulo equilátero exterior tiene área 1. Los puntos D, E y F está en la cuarta parte del recorrido como se muestra en la figura. ¿Cuál es el área del triángulo DEF?



ALGUNAS SUGERENCIAS AL DOCENTE Y POSIBLES SOLUCIONES

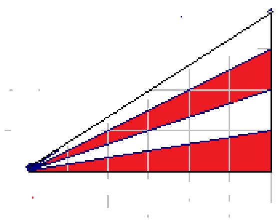
1. Este problema lo pueden hacer en grupos de dos o tres, también se les puede dar un animal distinto a cada grupo.
Como cada color va a expresarse en términos de relación parte-todo, no importa qué es lo que pasa del otro lado del animal (tres dimensiones), o sea que se puede trabar en dos dimensiones como indica la foto.

Por ejemplo, se les puede pedir a los estudiantes que primero hagan una conjetura en base a la percepción visual de lo que se les pregunta y luego que la justifiquen matemáticamente.
Algunas preguntas que se sugiere hacer a los estudiantes:

a. Si se desea conocer el área de la mariposa de la foto ¿con qué recursos lo harías? ¿Cuadricular la foto podría ser una solución? ¿Por qué? ¿Influye el tamaño de los cuadraditos? Utiliza distintos cuadriculados y explica.
b. ¿Podría conjeturar visualmente una razón aproximada entre las partes coloreadas de las alas con respecto al área total? (Colores: negro, crema, rojo y azul) Comprobar tu conjetura en base a un cuadriculado seleccionado.
c) ¿En qué relación expresaría el área visible del cuerpo de la mariposa con respecto al área total de la misma? Conjetura y comprueba.
La manera que probablemente surja como la óptima, es realizar una cuadrícula, contar todos los cuadraditos que hay sobre cada animal (total) y luego contar los de cada color, luego comparar (parte-todo). De esta manera se puede establecer la razón y/o porcentaje. Tener en cuenta que, cuanto más pequeña es la cuadrícula, la precisión será mayor.

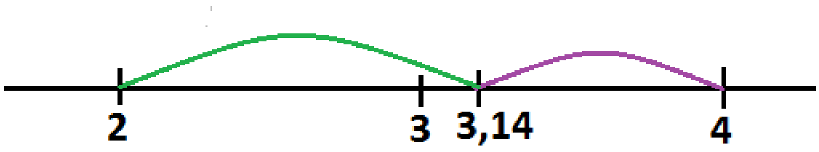
2. La cebra es blanca con rayas negras (investigar) y se puede hacer una aproximación del 50% de cada color.

3. El área sombreada es la mitad del total.
Uno de los razonamientos que se puede hacer es el siguiente: dividendo en ocho el rectángulo por sus bases medias y por sus diagonales se obtienen triángulos congruentes en cuanto a forma y color. De esta manera se puede analizar fácilmente cada uno de estos triángulos.



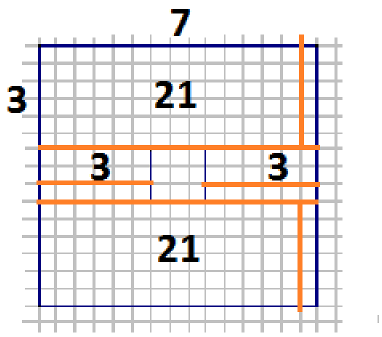
Este triángulo a su vez está dividido en 4 triángulos de área equivalente, ya que tienen la misma base y la misma altura. Como hay dos de cada color, la parte sombreada (roja) es la mitad del total. Este razonmiento se hace extensivo a todo el rectángulo.

4. Se puede considerar que el círculo es el mismo en ambos casos. Llamemos R al radio de ese círculo, por lo tanto el área de ese círculo es $A_c = \pi \cdot R^2$
En el primer caso, el lado del cuadrado tiene la misma longitud que el diámetro del círculo, o sea 2R. Entonces la diferencia entre el área del cuadrado y el área del círculo es: $(2R)^2 – \pi \cdot R^2 =$ $\mathbf{(4 – \pi) \cdot R^2}$
En el segundo caso, el diámetro del círculo es la diagonal del cuadrado. Aplicando el Teorema de Pitágoras: $d^2 = 2L^2 \Rightarrow L = \sqrt{d^2/2}$. Su área es $(\sqrt{d^2/2})^2 = d^2/2 = 4R^2/2 = 2R^2$.
La diferencia entre el área del círculo y el área del cuadrado es: $\pi \cdot R^2 - 2R^2 =$ $\mathbf{(\pi – 2) \cdot R^2}$
Queda por verificar si $(4 – \pi) \cdot R^2 <, >,= (\pi – 2) \cdot R^2$
Que significa verificar si $(4 – \pi) <, >,= (\pi – 2)$
Gráficamente:



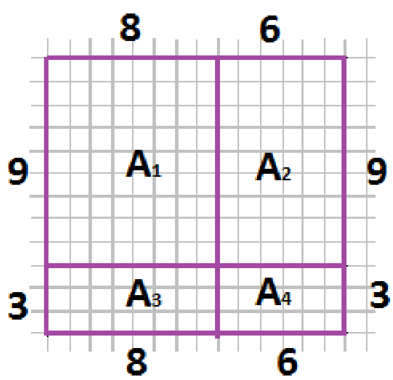
La diferencia entre π y 2 es mayor que la diferencia entre π y 4, entonces en el primer caso queda menos espacio que en el segundo caso.

5. Una forma es armar rectángulos lo más grande posibles cuyos lados sean múltiplos de 2, y ver cuántos cuadrados de 2x2 entran en esos rectángulos:



En total son: 21 + 21 + 3 + 3 = 48

Puede suceder que los alumnos calculen la cantidad total de baldosas 15 x 15 = 225, y luego lo dividan por 4 (la cantidad de baldosas de cada cuadrado), lo cual da como resultado 56 cuadrados y sobra 1 baldosa. Este razonamiento es erróneo, ya que las baldosas están pegadas y hay un resto de baldosas con las cuales no se pueden armar cuadrados de 2x2.



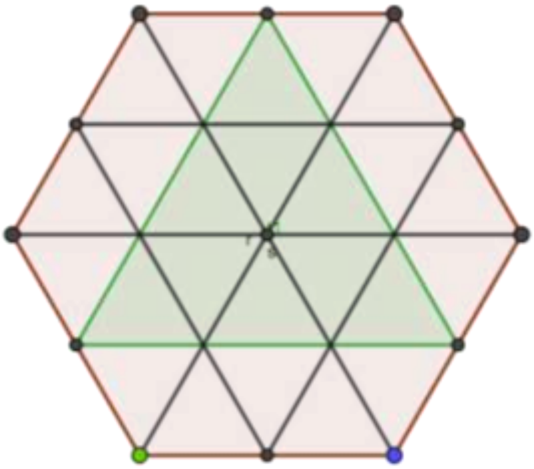
6.
$A_{total} = 14 \times 12 = 168$
$A_1 = 72$
$A_2 = 54$
$A_3 = 24$
$A_4 = 18$

$R_1 = 72/168 = 3/7$
$R_2 = 54/168 = 9/28$
$R_3 = 24/168 = 1/7$
$R_4 = 18/168 = 3/28$

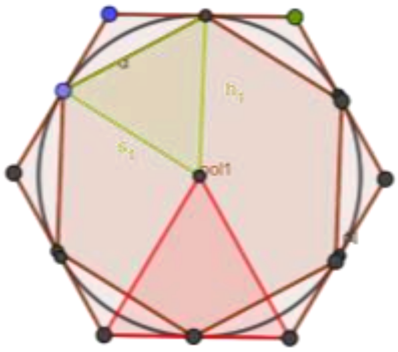
La parte de construcción es producción libre.

7. La parte sombreada es la mitad del cuadrado grande menos la mitad del cuadrado chico: $4{,}5\ u^2 – 0{,}5\ u^2 = 4\ u^2$
La fracción en relación al cuadrado grande es 4/9.

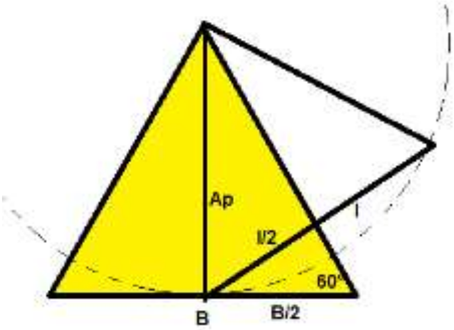
8. Uniendo los vértices opuestos y los puntos medios restantes, el hexágono queda "triangulado" en triángulos congruentes que se pueden tomar como unidades. En total hay 24 triángulos unidad, y el triángulo tiene 9 triángulos unidad, o sea que la relación entre ambas figuras es 24/9.



9. Los hexágonos regulares se pueden dividir (desde el centro) en seis triángulos equiláteros congruentes. La relación entre las áreas del hexágono inscripto y el circunscripto es la misma que si comparamos las áreas del triángulo central de cada uno. El lado del triángulo verde (inscripto) es la altura (o apotema) del triángulo rojo (circunscripto) y a su vez es el radio de la circunferencia.

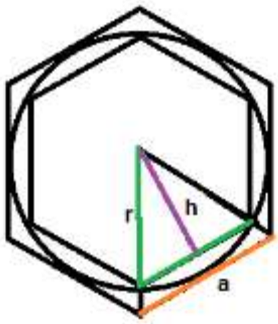


sen 60° = (l/2) / (b/2) = l/B => **B = l/0,866**



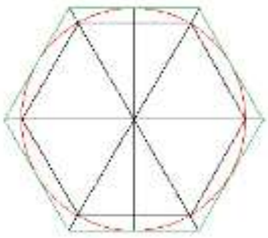
$A_1 = A_2/(0{,}866)^2 = A_2 / 0{,}75$ => $\mathbf{A_1 / A_2 = 1 / 0{,}75}$

Otra demostración usando la proporcionalidad en triángulos semejantes:



r/a = √3/2 r / r = √3/2 (relación entre las longitudes)
Relación entre áreas:
Área del hexágono inscripto 6 . (r.√3/2 r/2)/2
Área del hexágono circunscripto: 6 . a.r/2
(6 . a.r/2) /[6 . (r.√3/2 r/2)/2] = 4/3 (porque a = 2r/√3)

Otra demostración (Oscar Bressan):



Sea ℓ el radio de la circunferencia. En consecuencia el lado del hexágono inscripto es ℓy el apotema del hexágono circunscripto es también ℓ.
El hexágono inscripto consta de seis triángulos equiláteros de lado ℓ y cuya altura es:

$$\mathrm{h}_{\text{inscripto}} = \ell\sqrt{1-1/4} = \ell\frac{\sqrt{3}}{2}$$

El área de cada triángulo inscripto será:

$$\text{área}_{\text{triángulo inscripto}} = \frac{1}{2}\ell^2\sqrt{1-1/4} = \ell^2\frac{\sqrt{3}}{4}$$

y el área del hexágono inscripto:

$$\text{área}_{\text{hexágono inscripto}} = 6\times\frac{1}{2}\ell^2\sqrt{1-1/4} = 3\,\ell^2\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Para determinar la longitud de los lados de los triángulos equiláteros del hexágono circunscripto ("la") tenemos que la apotema que vale ℓ satisface:

$$\ell^2 = la^2 - \left(\frac{la}{2}\right)^2 = la^2\left(1-\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4}la^2 \qquad \Rightarrow la = \ell\frac{2}{\sqrt{3}}$$

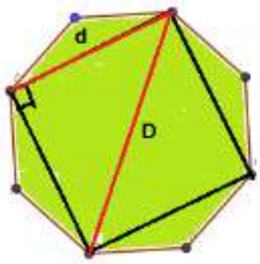
El área del triángulo circunscripto es

$$\text{área}_{\text{hexágono circunscripto}} = 6\,\ell^2\frac{1}{\sqrt{3}} = 2\ell^2\sqrt{3}$$

Finalmente la relación de las áreas es:

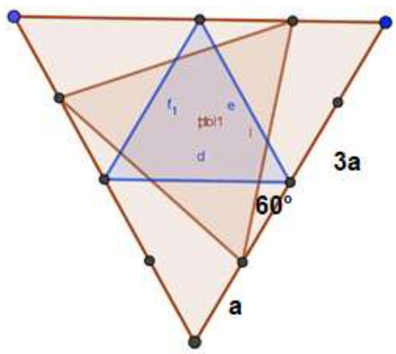
$$\text{Relación áreas} = \frac{2\ell^2\sqrt{3}}{(3/2)\ell^2\sqrt{3}} = \frac{4}{3}$$

10.



Uniendo los vértices alternados se forma un cuadrado inscripto en el octógono (los lados opuestos tienen la misma pendiente, son paralelos y los 4 lados son congruentes). Entonces, aplicando el Teorema de Pitágoras:

$D^2 = d^2 + d^2$ => **$D = \sqrt{2}\, d$**



11.

No es 1/4. El triángulo equilátero azul se obtuvo uniendo los puntos medios de los lados; en este caso el área es 1/4, como se puede observar. También se puede observar (intuitivamente) que el triángulo construido a partir de la cuarta parte de cada lado es mayor (o sea que podemos observar que es mayor que 1/4).

Aplicando el teorema del coseno (llamemos x l lado del triángulo interior):
$X^2 = a^2 + 9a^2 – 3a^2 . \cos 60°$
$X^2 = 10 a^2 – 3 a^2 . ½ = 17 a^2$
$X = √17/2 a$
Relación entre los lados: 4 a / √17/2 a
Relación entre áreas: 16/ 17/2 = 32/17