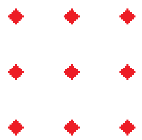
TRIÁNGULOS SOBRE RETICULADO (EULER)

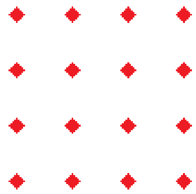
Adriana Rabino – Oscar Bressan – Betina Zolkower

Contenidos: Clasificación y propiedades de los triángulos

Sea un retículo cuadrado de n x n puntos. Se forman triángulos cuyos vértices sean puntos del reticulado, con la condición que uno de ellos es fijo y además es uno de los vértices del cuadrado del reticulado. ¿Cuántos triángulos se pueden formar?



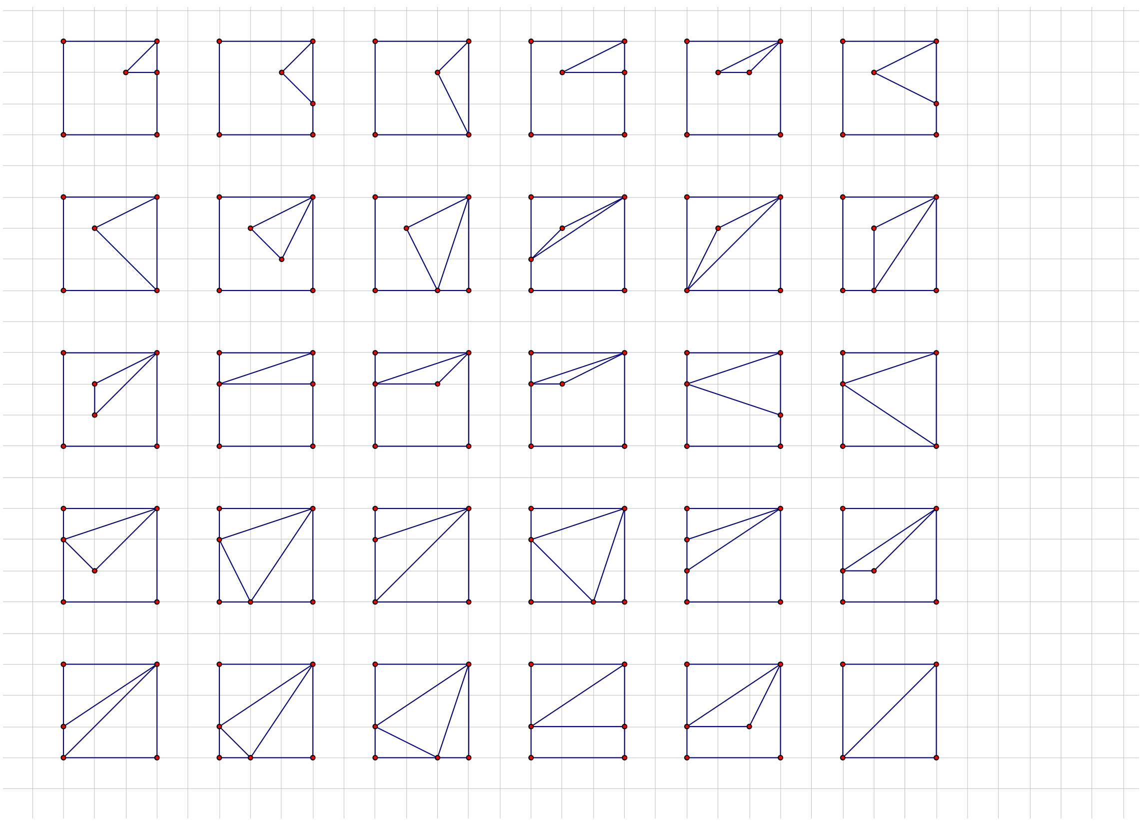
3 x 3



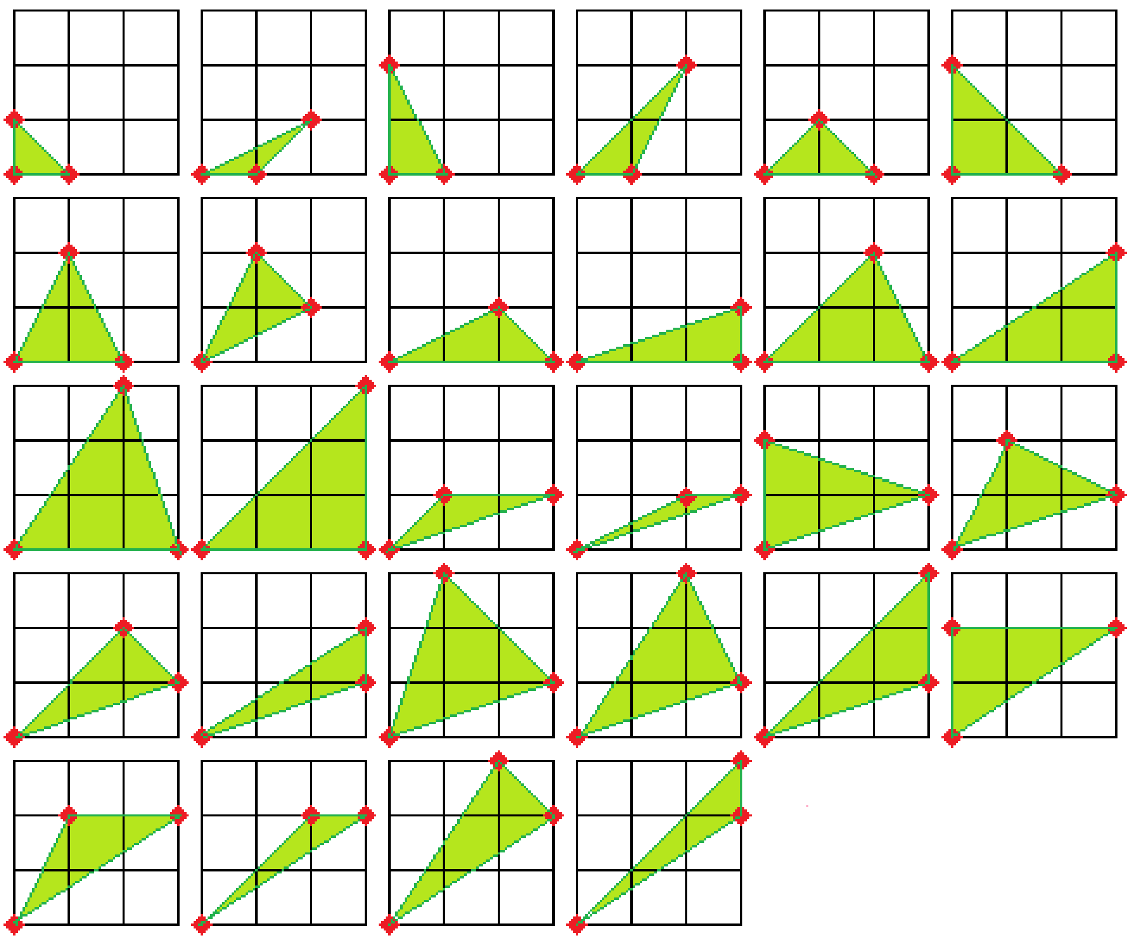
4 x 4

1. Se presentan a continuación dos grupos de triángulos(A y B) realizados sobre un reticulado de 4 x 4 con la condición de que sus vértices son vértices del mismo pero uno de ellos es fijo y a su vez es vértice del cuadrado:

A.



B.

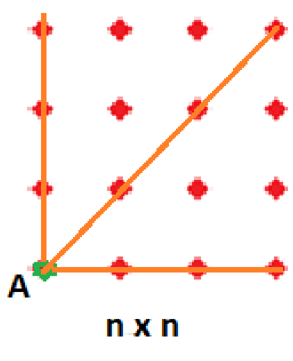


Se les pide que asocien cada triángulo del primer grupo con alguno del segundo grupo de tal manera que sean congruentes, explicando la estrategia utilizada. Se pueden ayudar utilizando las propiedades de los triángulos y la clasificación (por lados o por ángulos).

2. ¿Cuántos triángulos se pueden generar atendiendo a las condiciones anteriores?

La demostración para llegar a generalizar una fórmula no es sencilla. En principio se conjetura una fórmula y luego se demuestra por el método de Inducción completa. Se puede seguir la demostración o se puede utilizar directamente la fórmula

Se puede trabajar sobre un solo vértice del cuadrado ya que la situación se repite en todos los vértices.



El cuadrado tiene n^2 puntos. Sacando el vértice A quedan $n^2 - 1$ puntos. Si tomo esos puntos de a pares puedo formar triángulos con el vértice A (siempre y cuando esos 3 puntos no estén alineados, que son los de los dos lados adyacentes y la diagonal).

Como no importa el orden en que se tomen esos pares de puntos podemos decir que se trata de combinaciones de $(n^2 - 1)$ elementos tomados de a 2:

$C_{(n^2-1),2} = (n^2 - 1)! / 2!\,(n^2 - 1 - 2)! =$

$(n^2 - 1) . (n^2 - 2). (n^2 - 3)\ldots / 2 . 1 . (n^2 - 3) . (n^2 - 4). (n^2 - 5)\ldots =$

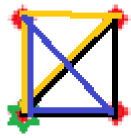
$(n^2 - 1) . (n^2 - 2) / 2 =$ $\mathbf{(n^4 - 3n^2 + 2) / 2}$

A este resultado hay que restarle los pares de los puntos que están sobre los lados adyacentes y los pares de la diagonal:

$3 . C_{(n-1),2} = 3.(n^2 - 3n + 2)/2$, entonces queda: $\mathbf{(n^4 - 6n^2 + 9n - 4) / 2}$

Demostración por inducción completa

El primer elemento que se considera es n = 2, ya que 0 y 1 no tiene sentido.

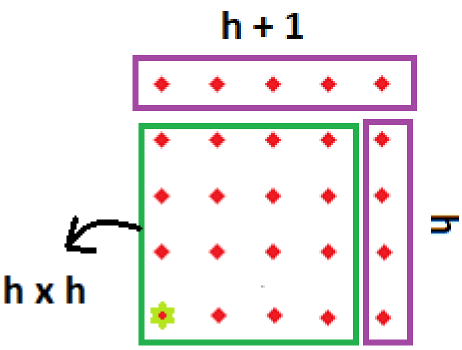


P(2): (es el caso de un reticulado de 2 x 2): $(2^4 - 6.2^2 + 9.2 - 4)/2 = 3$

Se cumple.

Supongamos que la proposición es verdadera para un h cualquiera, es decir, **P(h)** en un reticulado de h x h, implica que hay $(h^4 - 6h^2 + 9h - 4)/2$ triángulos diferentes (tomando un punto de una esquina como vértice fijo de los triángulos).(Hipótesis inductiva).

Habría que demostrar que **P(h+1)** es verdadero, o sea que para un reticulado de (h+1) x (h+1), **=>** hay $[(h+1)^4 - 6.(h+1)^2 + 9(h+1) - 4]/2$ triángulos diferentes.



En un reticulado de (h+1) x (h+1) hay 2h + 1 puntos nuevos con respecto al reticulado de h x h.

Si hacemos pares de puntos tomando cada punto nuevo con un punto ya existente van a haber $(2h + 1) . (h^2 - 1)$ pares nuevos. A esto hay que agregarle los pares que se forman en los bordes nuevos: $C_{(2h+1,2)}$ y quitarles todos los pares que se forman con los tres puntos de los extremos de los lados y la diagonal, que son: $3. (h - 1)$.

O sea hay $(2h^3 + h^2 - 2h - 1) + (2h^2 + h) - 3.(h - 1) = 2h^3 + 3h^2 - 4h + 2$ pares nuevos para formar triángulos.

Si suponemos que P(h) es verdadero y le sumamos los triángulos nuevos, nos queda que la cantidad de triángulos es:

$(h^4 - 6h^2 + 9h - 4)/2 + (2h^3 - 4h + 3h^2 + 2) =$ $\mathbf{(h^4 + 4h^3 + h)/2}$ (1)

Desarrollando en paralelo la hipótesis inductiva para (h+1):
$[h+1)^4 - 6 (h+1)^2 + 9(h+1) - 4]/2 =$ $\mathbf{(h^4 + 4h^3 + h)/2}$ (2)

De (1) y (2) queda demostrada la propiedad: En un reticulado de n x n se pueden formar:
$\mathbf{(n^4 - 6n^2 + 9n - 4) / 2}$ triángulos.

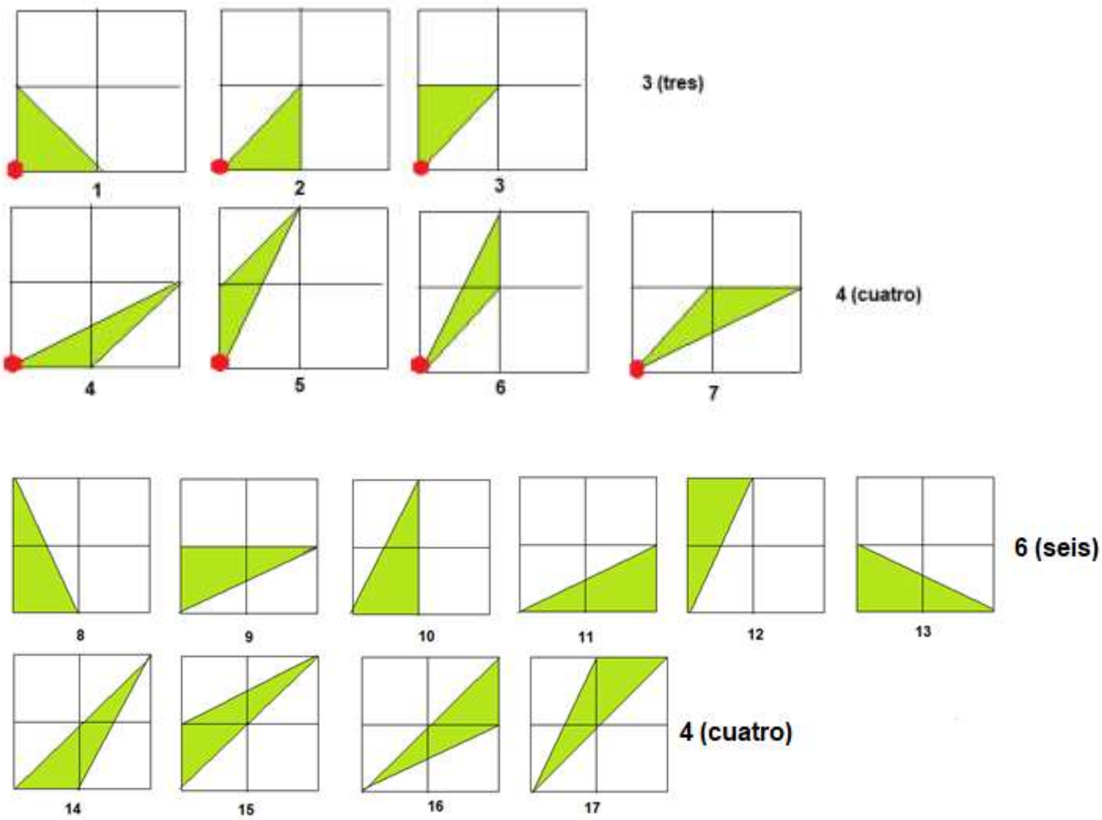
$$\boxed{\mathbf{(n^4 - 6n^2 + 9n - 4) / 2}}$$

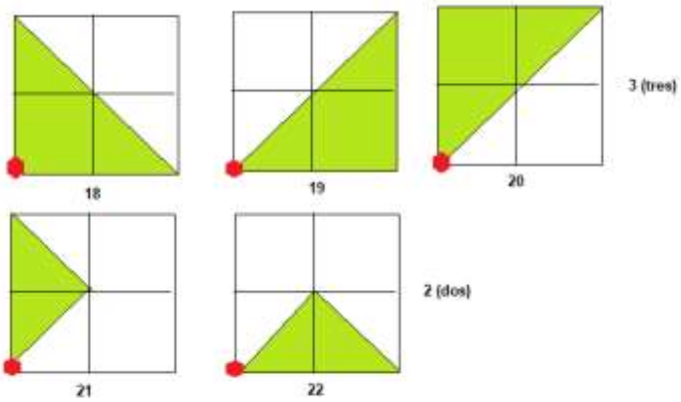
3. Calcular la cantidad de triángulos para algunos reticulados, por ejemplo: 3 x 3, 4 x 4,
   5 x 5, 10 x 10.

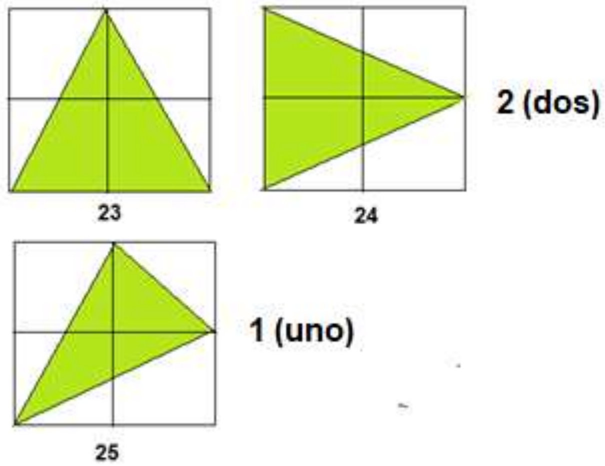
4. Dibujar todos los triángulos para reticulados de 3 x 3 y de 4 x 4. Para organizarse utilizar propiedades y apoyarse en la clasificación. Buscar un criterio para organizarse.

(He aquí la solución):

3 x 3 (25 casos)



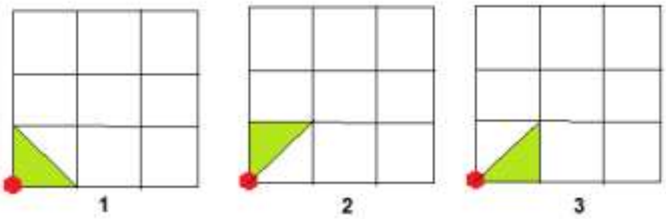




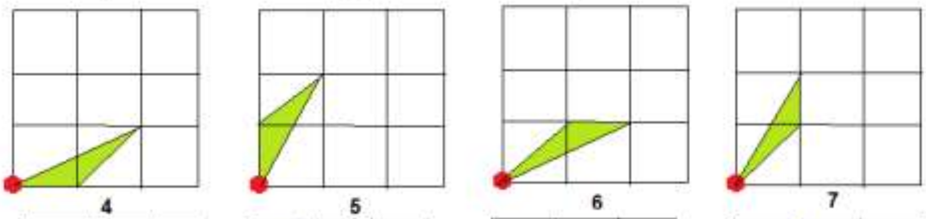
Resultan 25 triángulos de los cuales hay 8 que no son congruentes.

4 x 4 (96 casos)

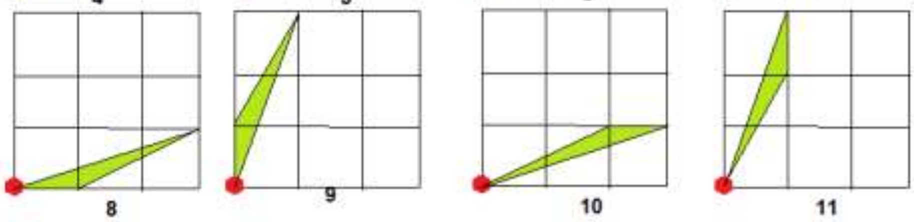
base 1 altura 1



3 (tres)

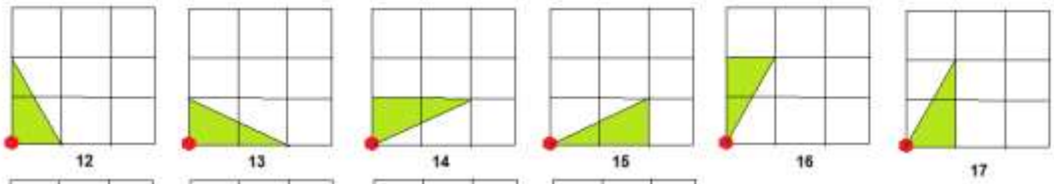


4 (cuatro)

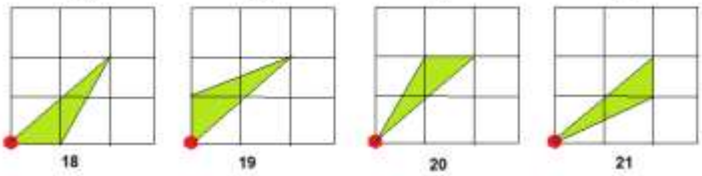


4 (cuatro)

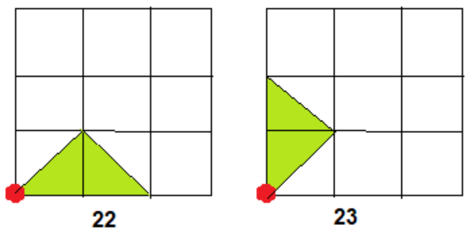
base 1 altura 2 (o viceversa)



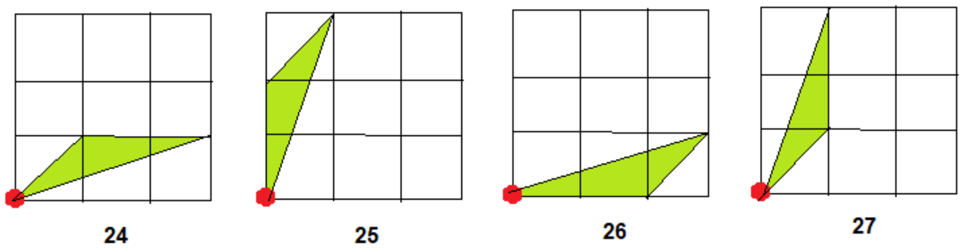
6 (seis)



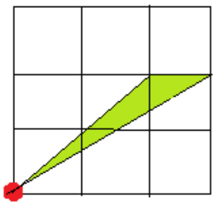
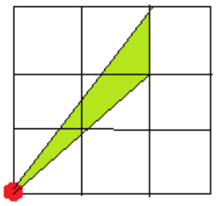
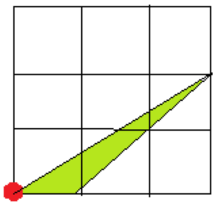
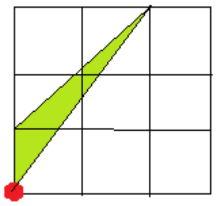
4 (cuatro)



2 (dos)

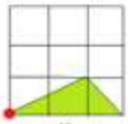
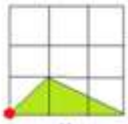
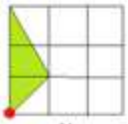
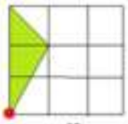


4 (cuatro)

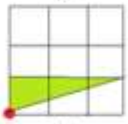
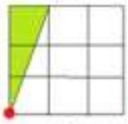
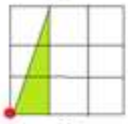
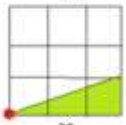
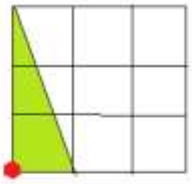
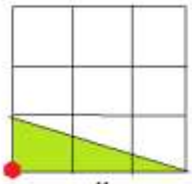

28

29

30

31

4 cuatro)

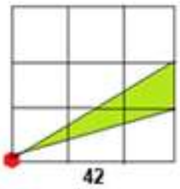
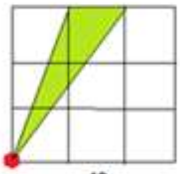
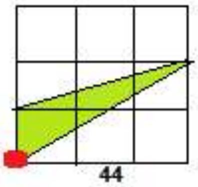
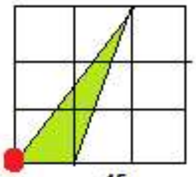
base 1 altura 3 o viceversa


32

33

34

35

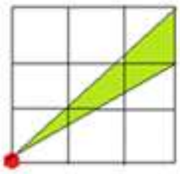
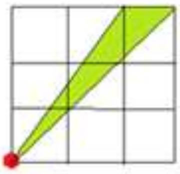
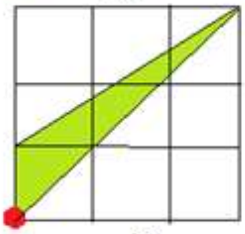
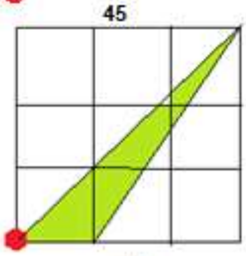
4 (cuatro)


36

37

38

39

40

41

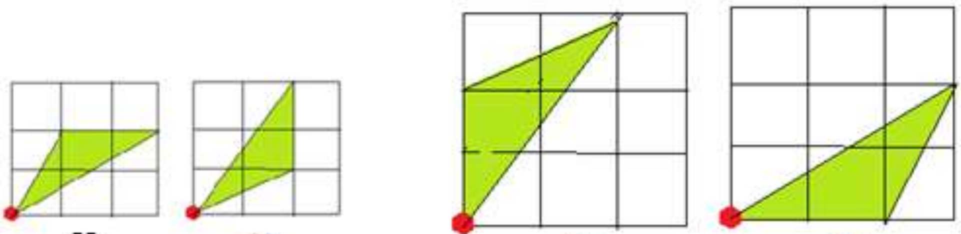
6 (seis)


42

43

44

45

4 (cuatro)


46

47

48

49

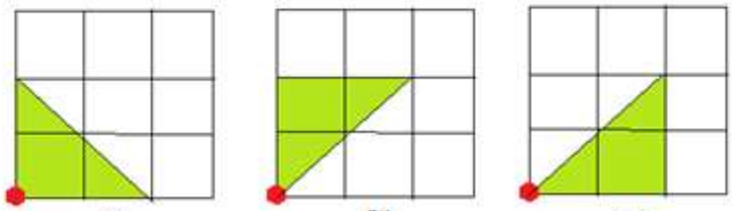
4 (cuatro)



55 56 57 58

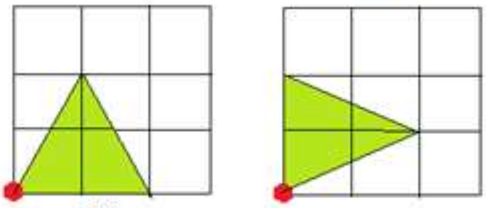
4 (cuatro)

base 2 altura 2



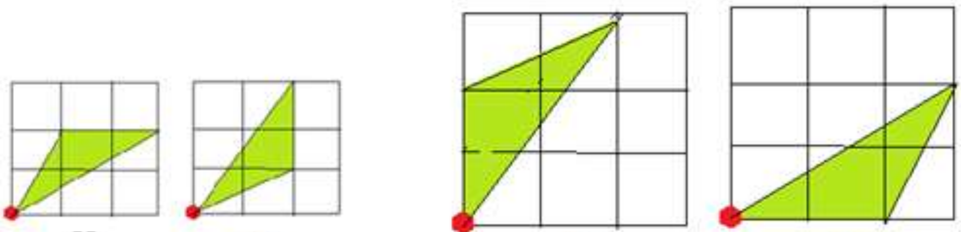
50 51 52

3 (tres)



53 54

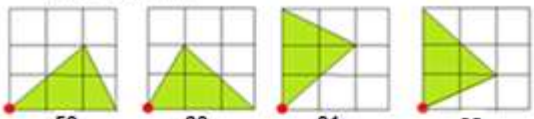
2 (dos)



55 56 57 58

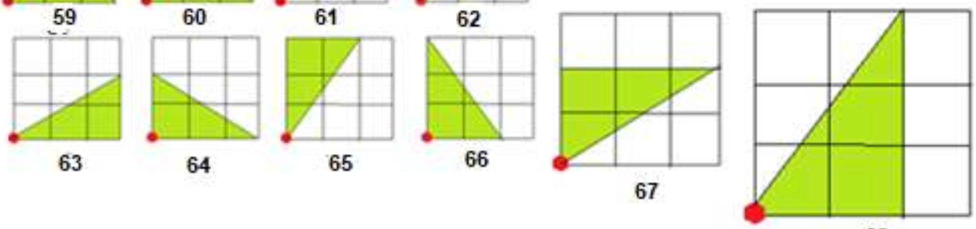
4 (cuatro)

base 3 altura 2 o viceversa



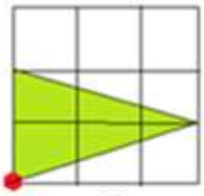
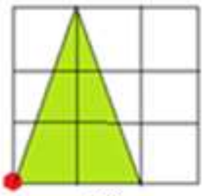
59 60 61 62

4 (cuatro)

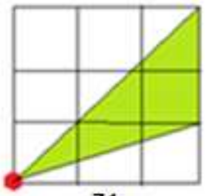
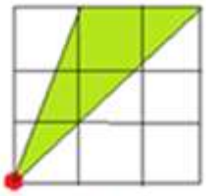
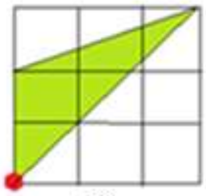
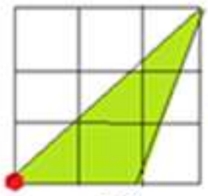


63 64 65 66 67 68

6 (seis)

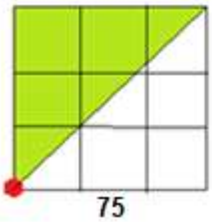
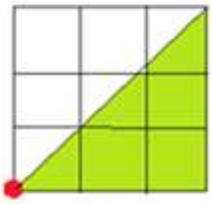
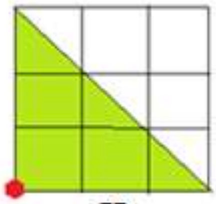

69

70

2 (dos)

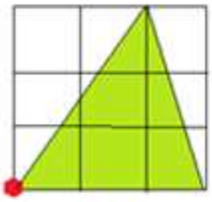
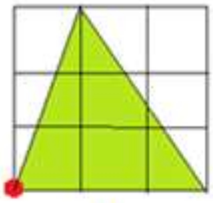
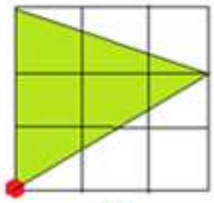
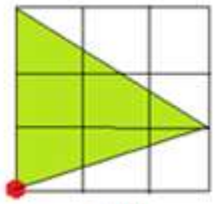

71

72

73

74

4 (cuatro)

base 3 altura 3

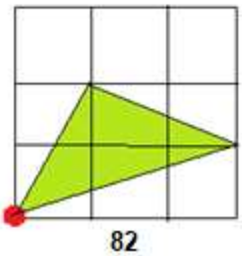
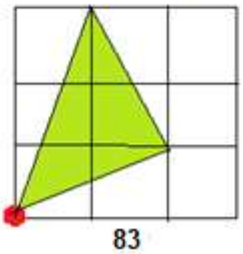

75

76

77

3 (tres)

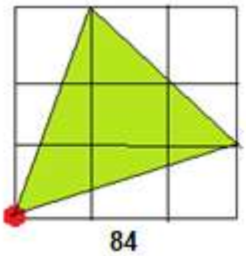

78

79

80

81

4 (cuatro)

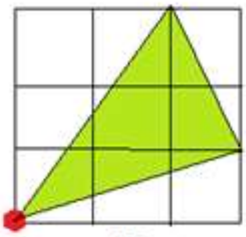
Otros (los lados no son lados de la retícula)

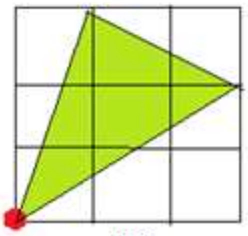

82

83

2 (dos)

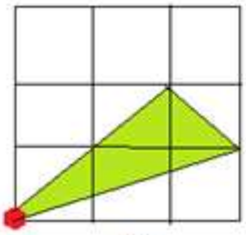

84

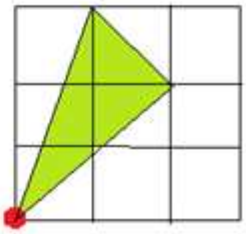
1 (uno)


85

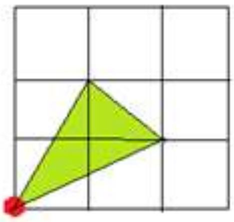

86

2 (dos)

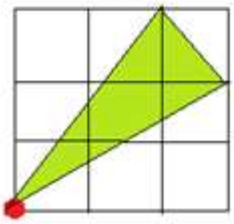

87


88

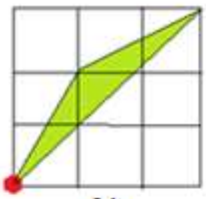
2 (dos)

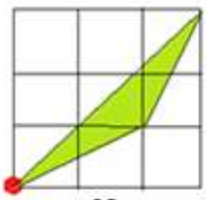

89

1 (uno)

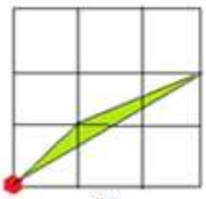

90

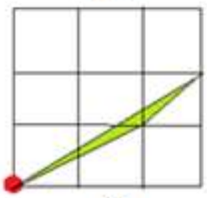
1 (uno)

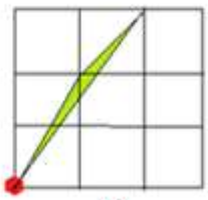

91

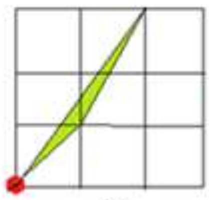

92

2 (dos)


93


94


95


96

4 (cuatro)

Resultan 96 triángulos de los cuales 29 son diferentes

Se presenta acá otra situación. Hay muchos triángulos que resultan congruentes (decimos que dos triángulos son congruentes cuando se corresponden por un movimiento rígido).

5. ¿Cuántos triángulos diferentes hay que cada caso?

En base al problema anterior, organizar la información y establecer una conjetura. Por ejemplo:

Para 3 x 3:

Cantidad de triángulos Que se repiten	Cuántos casos	Total
1	1	1
2	2	4
3	3	9
4	14	56
6	1	6
total		**25**

Hay 8 triángulos distintos (cada renglón determina una clase), por lo tanto de un total de 25, 17 son repeticiones.

Para 4 x 4:

Cantidad de triángulos Que se repiten	Cuántos casos	Total
1	3	3
2	8	16
3	3	9
4	12	48
6	3	18
total		**96**

Hay 30 triángulos distintos, por lo tanto de 96 triángulos, hay 66 que se repiten.

ANEXO