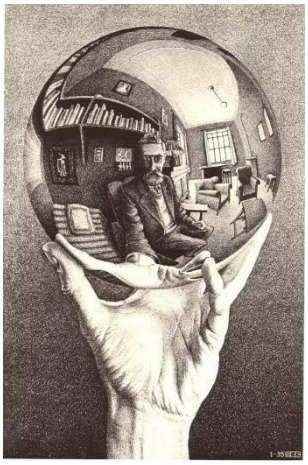
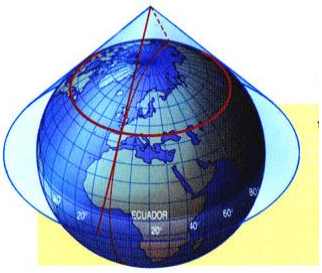
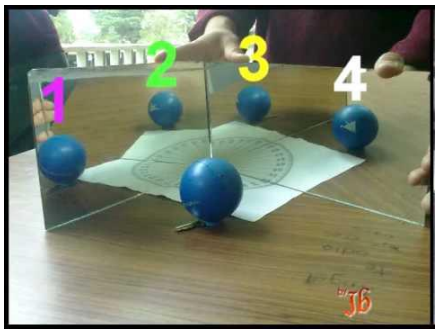


EL MUNDO DE LAS TRANSFORMACIONES

ENFOQUES Y ACTIVIDADES



ADRIANA ZITA RABINO
GRUPO PATAGÓNICO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA
www.gpdmatematica.ar
2022



EL MUNDO DE LAS TRANSFORMACIONES.

ÍNDICE **Página**

Introducción …… **2**

ACTIVIDADES

TRANSFORMACIONES EN EL MUNDO …… 4

LAS TRANSFORMACIONES EN GEOMETRÍA …… 9

TRANSFORMACIONES: MÉTRICAS (CONGRUENCIA Y SEMEJANZA), AFÍN, PROYECTIVA y TOPOLÓGICA: …… 14

- **CONGRUENCIAS (ISOMETRÍAS O MOVIMIENTOS RÍGIDOS) …… 14**

Isometrías…… 14
Simetría axial …… 14
Traslaciones …… 17
Rotaciones …… 18
Simetría central …… 18

Movimientos rígidos y álgebra …… 20

- **SEMEJANZA …… 34**
- **TRANSFORMACIONES AFINES …… 45**
- **TRANSFORMACIÓN PROYECTIVAS …… 53**
- **TRANSFORMACIONES TOPOLÓGICAS …… 58**

LA INVERSIÓN o EL INVERSOR DE PEAUCELIER …… 64

ANEXO 1:

¿QUÉ TRANSFORMACIONES NOS PERMITEN LLEVAR LA SUPERFICIE ESFÉRICA DEL GLOBO TERRÁQUEO A UN PLANO? ……72

ANEXO 2:

ANALIZANDO OBRAS DE ARTES A LO LARGO DE LA HISTORIA …… 85

LAS MUNDO DE LAS TRANSFORMACIONES

Adriana Rabino

Introducción

La geometría ofrece innumerables oportunidades para que los estudiantes desarrollen habilidades (visuales, de ubicación, de construcción, de comunicación, de razonamiento), resuelvan problemas significativos, elaboren conjeturas, demuestren propiedades...y se puedan divertir y aprender haciéndolo.

Entonces, ¿qué pasa con su enseñanza?
Muchas veces parece que ésta es una "carga" para el docente y por ende para el estudiante. ¿Cómo es posible que algo tan cercano y usado en nuestra vida cotidiana se ignore en la escuela? La geometría no pasa por hacer sólo construcciones con elementos de geometría, clasificaciones de figuras, o memorizar propiedades. Hay todo un mundo de actividades y procesos para preparar nuestras clases que llevan al estudio del espacio desde el punto de vista geométrico.

Desde esta óptica nos vamos a introducir en el **mundo de las transformaciones**.

Lo que se trabaja de **transformaciones geométricas** en secundaria (y un poco en primaria) está acotado a la construcción mecánica de movimientos rígidos y de la semejanza (en el plano) en ejercicios estereotipados. No se profundizan los usos de estos movimientos ni sus propiedades, ni en la realidad ni en la geometría misma.
Además de estas transformaciones, donde se mantiene la forma de las figuras (tanto en el plano como en el espacio) existen otras más complejas que, aplicadas a una figura, alteran su aspecto, tales como las **proyectivas, afines**, **topológicas**, que se las puede estudiar a través de las **invariantes** que las caracterizan.

Entonces se proponen una serie de actividades (con sus posibles soluciones y comentarios) con una visión holística de las transformaciones, de una manera global e integrada para que tengan mayor significado para el estudiante. Las mismas corresponden a distintos niveles (desde primaria a nivel superior); queda a criterio del docente elegir las que crea conveniente. En este sentido, se abordará el contenido desde distintos ángulos: primero apuntando al concepto de transformación en general, luego como resultado de una proyección de rayos de luz paralelos o desde un foco (a distancia finita), desde un plano a otro (paralelos entre sí o no), analizando las invariantes. Esta propuesta no se enfocará tanto en las construcciones de las transformaciones (aunque se harán algunas) sino más bien en los conceptos que conllevan, su aspecto funcional y su relación con el álgebra. Para ello se usará como soporte algún software de geometría dinámica como Cabrí o GeoGebra[1], especialmente para las **isometría**s, la **semejanza** y la **inversión**.

[1] Consideramos que el valor de los programas de geometría dinámica se centra especialmente en "barrer" multiplicidad de casos para que los estudiantes hagan conjeturas y generalicen, no solo para realizar construcciones.

No se estudiará el grupo de transformaciones desde el punto de vista de grupos algebraicos.

Se seguirá un proceso de matematización progresiva (en este caso, geometrización progresiva). Esto significa empezar las actividades propuestas con contenidos de la vida real, atractivos y fáciles de realizar, para ir avanzando hacia niveles pre-formales y finalmente de formalización.
Se presentan, en un principio, imágenes de obras "distorsionadas" para que se visualicen y describan cuál/es son las transformaciones que se ven en ellas.
Luego se propone trabaja con material concreto (sombras, telas de red, globos de caucho) para poder descubrir los elementos invariantes al efectuar las transformaciones indicadas, y analizar las semejanzas y diferencias entre ellas para luego organizar toda esa información en un cuadro.
A partir de allí se plantea trabajar cada una de las transformaciones (congruencia, semejanza, afín, proyectiva y topológica) en forma más rigurosa, conectando algunas de ellas con el álgebra y su aspecto funcional y analizando sus invariantes. Se harán algunas construcciones geométricas para su mayor comprensión y se trabajará con algún software de geometría dinámica (GeoGebra o Cabrí). Por último, se verá la transformación de inversión en contexto matemático con el soporte de GeoGebra.

Finalmente se anexan dos materiales para poder ser trabajados en forma interdisciplinaria con otras áreas (Geografía y Arte): el primero consiste en ver las proyecciones del globo terráqueo sobre un plano, analizar cuál es apropiada según el objetivo que se necesite desarrollar, detallando cada una con sus pros y sus contras ya que, en definitiva, no se puede hacer una proyección perfecta del globo terráqueo sobre un plano. En el segundo anexo se ven obras de arte a lo largo de la historia, destacando períodos históricos en que se ponderaba lo social o religioso. En cambio, en otros momentos, se intentó reproducir la realidad de la mejor manera, y para ello se recurrió a conocimientos matemáticos y geométricos como la proyección y la perspectiva.

Los contenidos que se tratan son los siguientes:

- Transformaciones: métricas (isométrica, semejanza), afín, proyectiva, topológica, inversión. Aspectos: geométrico, algebraico, funcional.
- Cartografía (distintos tipos de proyecciones).
- La geometría en las obras de arte.

ACTIVIDADES

TRANSFORMACIONES EN EL MUNDO

OBRAS ESPECTACULARES

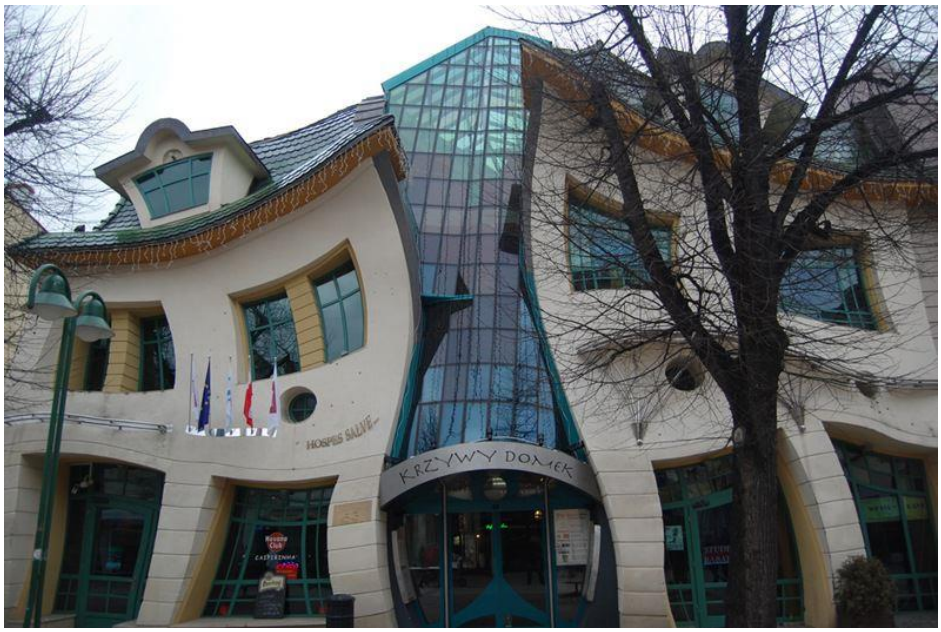
1. No es usual ver un edificio en movimiento que va cambiando su forma permanentemente, pero el avance de la ingeniería y de la tecnología nos permite conocer maravillas como ésta, LA TORRE ROTATIVA DE DUBAI (UEA):
En este edificio se tiene la opción de ver el amanecer en el dormitorio y disfruta los atardeceres sobre el océano mientras se cena. Como si fuera poco, este increíble "milagro" de la ingeniería produce energía por sí mismo, y hasta para otros edificios porque tiene turbinas de viento encajadas entre cada piso de rotación.

Se pueden observar a continuación cuatro momentos de la torre en movimiento:

Describir la transformación que se va produciendo en la torre.

2. Observar los siguientes edificios. ¿Cuál/es fue/ron la transformación/es que se les pudo haber realizado suponiendo que el edificio original tenía una construcción convencional? Descríbelas.

The Crooked House (La casa torcida, Sopt, Poland)



La Pedrera (Barcelona, España) (obra de Gaudí)

Wonder works (Trabajos maravillosos) (Pigeon Forge, TN, USA) (1)

Wonder works (Trabajos maravillosos) (Pigeon Forge, TN, USA) (2)

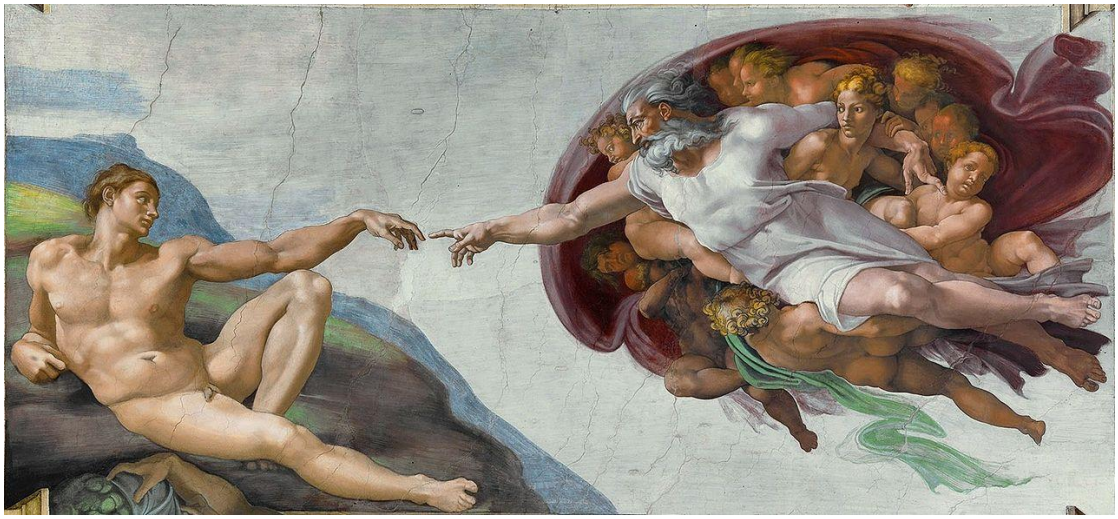
3. La bóveda de la **Capilla Sixtina** de la ciudad del Vaticano (Roma) contiene un conjunto de pinturas al fresco realizadas para decorar la misma. Fue pintada entre 1508 y 1512 por Miguel Ángel Buonarotti, es una de las obras pictóricas más complejas de toda la historia del arte.

El techo de la Capilla Sixtina está dividido en varias secciones, que representan las nueve escenas del Génesis (Biblia) y que son las que reciben mayor atención por su complejidad. Sobre los lunetos de las ventanas (bovedilla en forma de media luna abierta para que entre luz natural) y las enjutas laterales (espacios triangulares curvilíneos) es donde están los antepasados de Cristo, los triángulos donde se encuentran los tronos de los Profetas y las Sibilas y finalmente las enjutas de las esquinas o pechinas donde están las cuatro historias clave de la Salvación del pueblo de Dios (Israel).

Las columnas (reales) que están en los laterales se fusionan con el fresco al llegar a la bóveda, lo que da la sensación de que esas columnas continúan (pensar que la bóveda tiene más de 20 metros de altura, con lo cual, a la distancia, ese efecto es perfecto).

Vista del techo desde abajo

Las nueve historias del Génesis están representadas por escenas que ocupan el área central de la bóveda. Una de ellas es La Creación de Adán (Génesis I, 26: *Entonces dijo Dios: Hagamos al hombre a nuestra imagen, conforme a nuestra semejanza*). Nadie como Miguel Ángel había sabido plasmar este misterio de la creación de la vida humana con tanta sencillez y fuerza, teniendo la feliz idea de transmisión de esa vida por contacto de los dedos. Este fresco (como los otros nueve) mide 2,80m x 5,70m.



Miguel Ángel primero hacía sus bocetos en papel y perforaba las líneas del dibujo con un clavo. Luego sostenía el papel contra el techo y soplaba carboncillo pulverizado por las perforaciones para marcar el boceto en el yeso húmedo. Después pintaba siguiendo las marcas, improvisando y detallando, a veces, conforme adquiría confianza.

Pregunta: Dado que el techo de la bóveda tiene forma semicilíndrica, ¿cómo debía deformar Miguel Ángel sus bocetos en el papel (plano), para que al marcarlo en el techo no se vieran deformadas las figuras desde abajo?

4. Describe, con tus palabras, lo que entiendes por transformación.

POSIBLES SOLUCIONES Y COMENTARIOS

1. La torre va girando, pero cada piso gira con distinta velocidad y va generando ese efecto que se ve en las fotos. Cada determinado lapso de tiempo vuelve a formarse la torre en su estado original.

2. The Crooked House (La casa torcida, Sopt, Poland): las "líneas" rectas se hacen curvas, en un sentido y en otro.
La Pedrera (Barcelona, España, obra de Gaudí): las paredes, en vez de ser planas, son onduladas.
Wonder works (Trabajos maravillosos) (Pigeon Forge, TN, USA) (1): está "patas para arriba", el techo en el piso y el piso en el techo.
Wonder works (Trabajos maravillosos) (Pigeon Forge, TN, USA) (2): simula que se quebró el edificio y se abrió.

3. *Los estudiantes pueden probar de hacer un dibujo sencillo en una hoja rectangular, doblarla como un semicilindro y de esta forma deducir cuál es la transformación que pudo haber realizado Miguel Ángel. De ahí pueden inferir el camino inverso: cómo hacer el dibujo deformado en el plano para que, al curvarlo se vea el dibujo deseado.(Ver Proyección cilíndrica en este documento).*

4. Producción libre.

LAS TRANSFORMACIONES EN GEOMETRÍA

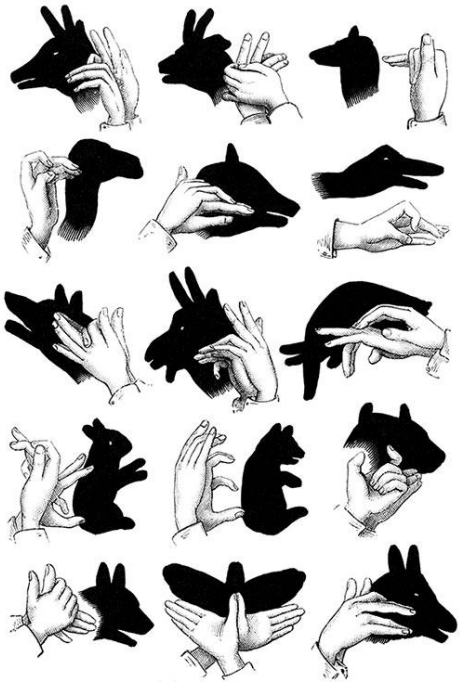
Cómo se clasifican las transformaciones
Para trabajar en grupos de tres.

Materiales: hoja de calcar, linterna, globos, trozo de tela de canevá

1. Jugando con las sombras.

> *Vea correr la liebre por la cortina, al ganso haciendo el ganso, al héroe y al villano. Las manos del sueño siempre traen un sueño de la mano. (Sombras de la China. Canción de J.M. Serrat)*

Hace un tiempo atrás, cuando no había TV ni computadoras ni celulares ni *playstations*, había que rebuscárselas para jugar y divertirse, en especial los días de lluvia.



Uno de los juegos populares era el de las "sombras de la China": se trata de poner un foco de luz proyectado en una pared y con las manos haciendo sombra, descubrir distintas formas (en general, de animales), tal como se ve en la figura.

Vamos a realizar una experiencia más sencilla, haciendo dibujos y proyectándolos en otro plano. Pero con algunas condiciones que nos van a permitir descubrir qué cosas se deforman y cuáles no, bajo esas condiciones determinadas.
Las condiciones se van a referir a la posición del plano donde se proyecta la figura con respecto al plano donde se realiza el dibujo (si es paralelo o no). Y la otra condición es que si los rayos de luz que permiten la proyección de la sombra provienen de un foco o si son paralelos entre sí. Esto último parece raro, pero podemos suponer que los rayos del Sol son paralelos (si bien provienen de un foco, éste está tan lejos que los rayo llegan prácticamente paralelos a la Tierra).

a. Hacer un dibujo con fibrón en un vidrio y ver cómo se proyecta en el piso a partir de los rayos del Sol que entran por la ventana. Observar si se deformó la figura. En este caso los planos (ventana y piso) no son paralelos. Ahora repetir la experiencia, pero poniendo un plano paralelo a la ventana (por ejemplo, una hoja) para que se proyecte la figura en ese plano. Observar si hay diferencia con la proyección anterior.

b. Realiza la misma experiencia, pero esta vez con un foco de luz (puede ser una linterna, un retroproyector, un proyector o un cañón). Observar cómo varió la figura original, ya sea que los planos sean paralelos o no.

c. Si se parte de un cuadrado, ¿puedes hacer que la sombra:
i. sea otro cuadrado?
ii. sea un rombo?
iii. sea un cuadrilátero cualquiera?
Explicar cuáles son las condiciones en cada caso.

d. i. ¿Son siempre paralelas las sombras de lados paralelos?
ii. Si los lados son no paralelos, ¿pueden ser sus sombras paralelas?
e. i. Realizar un orificio que equidiste de dos lados de un cuadrado. ¿Dónde está ubicada la sombra del orificio? Analizar distintos casos.

f. Tomar 1/3 de la distancia entre 2 lados paralelos de un rectángulo y marcar un punto en ese lugar. ¿Qué sucede con la sombra de ese punto? Analizar distintos casos.

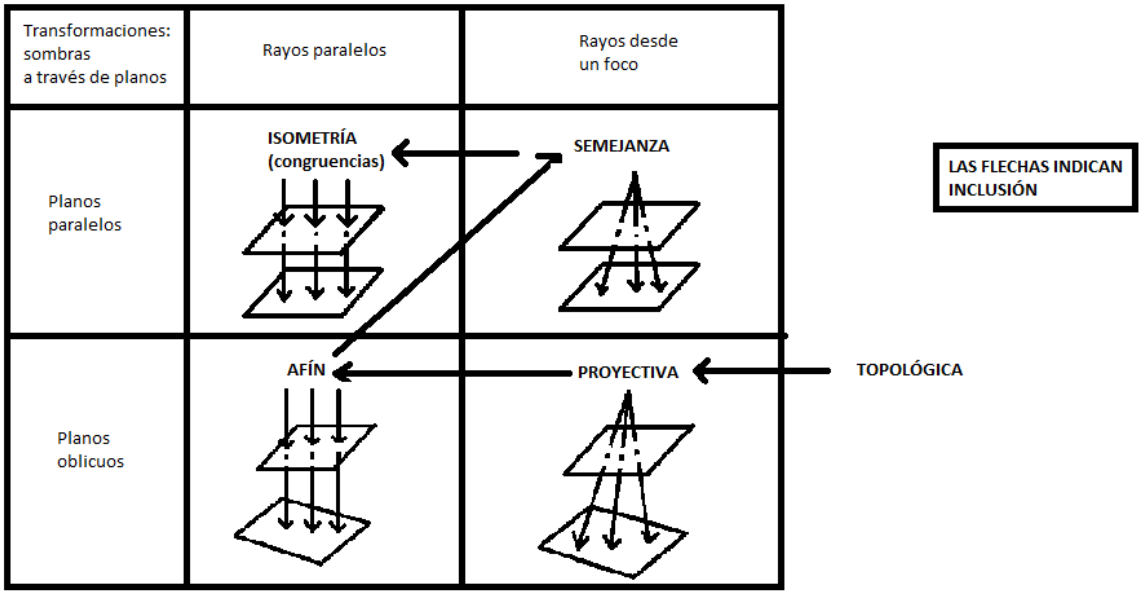
g. Apoyar una figura geométrica de cartón sobre una copa y estudiar qué propiedades se mantienen al observar la proyección de su sombra producida por el Sol o por un punto luminoso (considerar ángulos, paralelismo, longitudes, punto medio).

2. Dibujar en un trozo de globo de goma una figura y deformarla. Comparar las deformaciones con respecto a la figura original y con las experiencias del punto 1. Esta transformación, que podemos agregar a las del cuadro, se denomina “topológica”.

3. Repetir la experiencia del punto 1. a. y b. pero ahora con una figura geométrica, por ejemplo, un paralelogramo. Analizar y tomar nota, en cada caso, qué propiedades se mantienen y cuáles no.

4. Realizar distintas figuras geométricas sobre una tela cuadriculada elástica (canavá). Estirarla de distintas maneras (sólo horizontal, sólo vertical, en ambos sentidos, pero con distintos estiramientos). Analizar las **invariantes** (las invariantes son aquellas propiedades que se mantienen).

Se pueden esquematizar y clasificar las situaciones anteriores (utilizando como recurso la proyección de las sombras) en un cuadro de doble entrada como el siguiente:



Más adelante se verá otra forma de clasificar estas transformaciones.

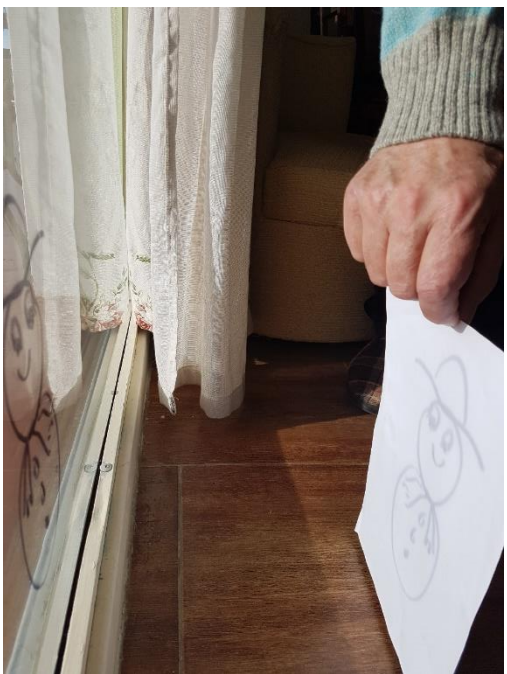
POSIBLES SOLUCIONES Y COMENTARIOS

Se realizará una experiencia sencilla, haciendo dibujos y proyectándolos en otro plano, teniendo en cuenta algunas condiciones que van a permitir que los estudiantes descubran qué cosas se deforman y cuáles no bajo esas condiciones determinadas.

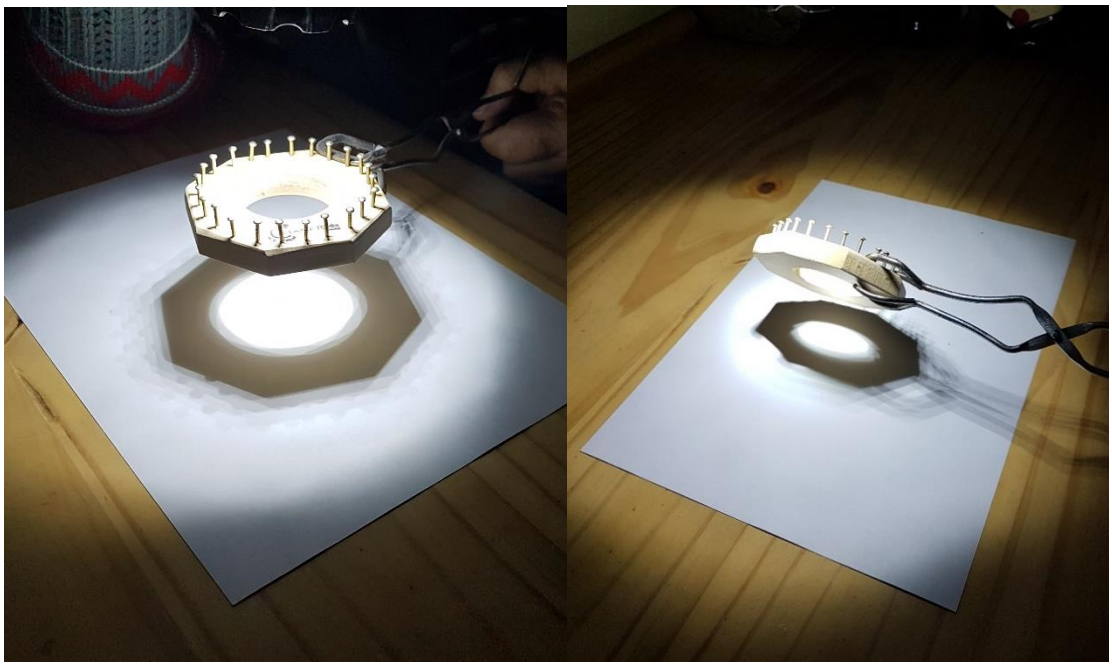
Los dibujos se pueden hacer sobre una hoja de papel de calcar y con la ayuda de un foco de luz se verá cómo se proyecta esa figura en otro plano (ver imágenes en el cuadro). Se pueden hacer las proyecciones a través de un vidrio de ventana y reemplazar el papel de calcar por un dibujo en el vidrio con fibrón.

Una de las condiciones que se va a tener en cuenta se va a referir a la posición del plano donde se proyecta la figura con respecto a la hoja (si es paralelo o no). Y la otra condición se trata de ver que si los rayos de luz provienen de un foco o si son paralelos entre sí. Esto último parece raro, pero podemos utilizar los rayos del Sol y suponer que son paralelos (si bien provienen de un foco, éste está tan lejos que los rayos llegan prácticamente paralelos).

1. a. b. *En las imágenes siguientes se da una idea del procedimiento:*



b.



c. d. e. f. g. *Se puede comprobar en forma experimental recortando un cuadrado de cartón y colocándolo encima de una copa, y alumbrando desde arriba con una linterna para que se vea la proyección de la sombra sobre la mesa. Moviendo el cuadrado o la linterna se van variando las posiciones relativas de los dos planos o la dirección de los rayos de luz hasta poder observar en la sombra lo que se pide.*
Analizar en forma análoga en qué situaciones se mantiene el paralelismo. Por último, analizar las invariantes (ángulos, longitudes relativas, puntos medios).
También se puede realizar la experiencia dibujando un cuadrado en el vidrio (para ver qué sucede con los rayos paralelos) e ir colocando el "plano" donde se proyecta la sombre en distintas posiciones respecto al vidrio.

2. *Los estudiantes pueden estirar el globo ayudándose entre dos. Verán que le pueden hacer cualquier tipo de "deformación". Lo único que no varía es que lo que está adentro de la figura queda adentro y lo que está afuera queda afuera. Y si el globo tiene un agujero, lo va a seguir teniendo aunque se estire el globo en todas las formas posibles.*

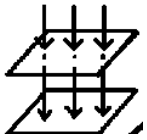
3. *Hasta ahora los estudiantes pueden decir que la figura se estiró, se alargó, se agrandó, etc. Al trabajar con figuras geométricas podrán identificar más fácilmente las invariantes, por ejemplo, el paralelismo, la amplitud de los ángulos, orden y otros. Se*

puede hacer en forma conjunta una lista de propiedades en el pizarrón para que los estudiantes vayan analizando si se mantienen o no.

4. *Esta actividad se puede realizar en forma conjunta con el docente.*

TRANSFORMACIONES: MÉTRICAS (CONGRUENCIA Y SEMEJANZA), AFÍN, PROYECTIVA Y TOPOLÓGICA.

CONGRUENCIAS (ISOMETRÍAS O MOVIMIENTOS RÍGIDOS) (planos paralelos y rayos paralelos)



Vamos a tomar como referencia el cuadro de la página 9 en donde se clasifican las transformaciones geométricas. Si los planos, cuando se proyecta una figura, son paralelos y los rayos son paralelos (podemos considerar los rayos de la luz solar, ya que por la distancia en que está el Sol practicamente llegan a la Tierra en forma paralela), la figura proyectada es congruente a la original.

Si nos trasladamos al plano, veamos cómo se pueden lograr figuras congruentes (o isométricas) a través de lo que se denominan movimientos rígidos.

Dentro de los movimientos rígidos se encuentran: las simetrías axial y central, la rotación y la traslación.

Simetría axial

1. Espejos planos

c.

Nos encontramos frente a un espejo:

a. Si me alejo del espejo, ¿qué pasa con mi imagen?

b. Si adelanto la pierna derecha, ¿cuál se mueve en la imagen?

Si recorro una figura en sentido horario, ¿cuál es el sentido recorrido en la imagen?

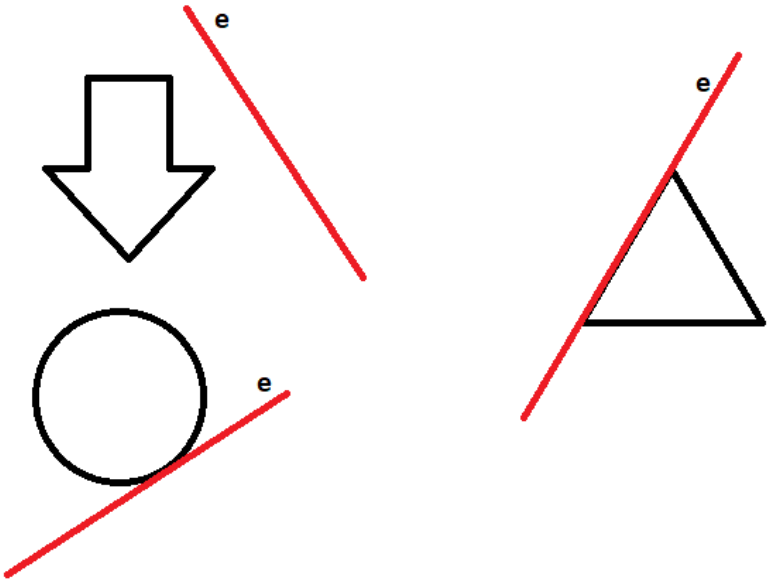
d. Seguro que tienes una marca que te identifica en tu rostro, por ejemplo, un lunar o una cicatriz. ¿De qué lado está cuando te miras al espejo? ¿De qué lado está en la realidad?

2. a. En una hoja en blanco realizar un doblez y colocar un poco de témpera. Doblar por el doblez y apretar la mancha. Desdoblar enseguida antes de que se seque.

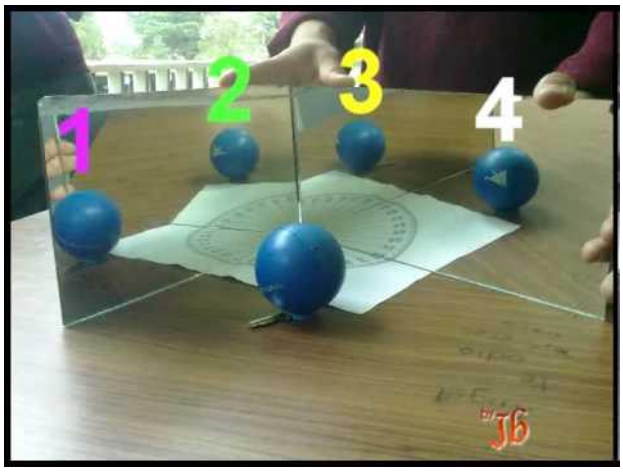
b. Buscar dos o tres puntos significativos de la figura que se formó de un lado del doblez y reconoce su homólogo del otro lado (si un lo llamamos A, el homólogo será A´).

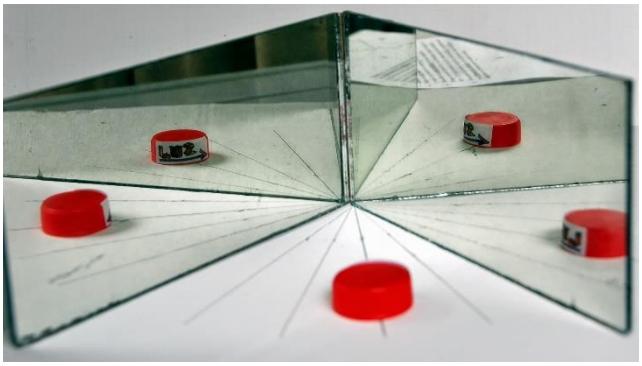
c. Unir cada punto con su homólogo. A partir de esta construcción, explicar: dado un punto y una recta (doblez que llamaremos eje de simetría) cómo podrías construir el homólogo para que al doblar la hoja por el eje estos dos puntos coincidan.

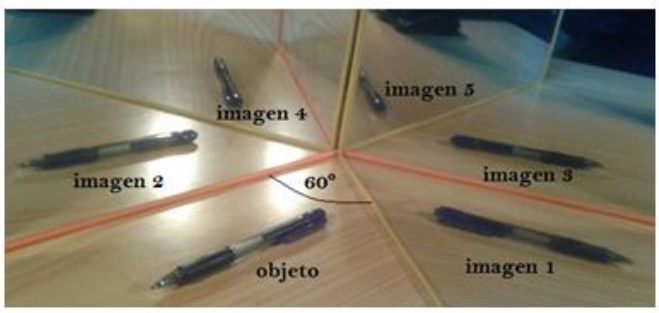
3. Hallar las figuras transformadas a las dadas a través de las S_e:

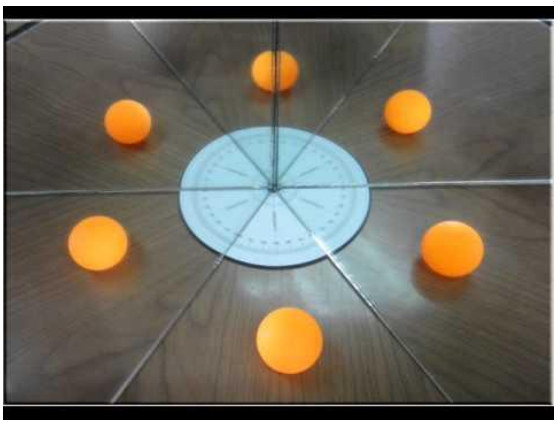


4. La reflexión o simetría axial con más espejos.



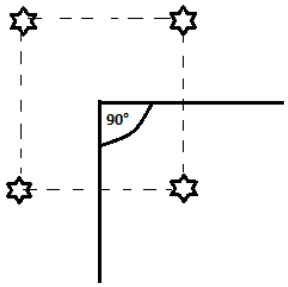






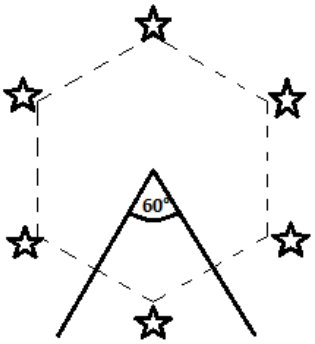
a. ¿De qué dependerá la cantidad de imágenes que se vean? ¿Se puede hacer una conjetura?

b. Realizar esquemas como el que siguen para poder generalizar:



Con 2 espejos en ángulo recto, ¿cuántas imágenes se ven del objeto?

Con 2 espejos a 60°, ¿cuántas imágenes se ven del objeto?

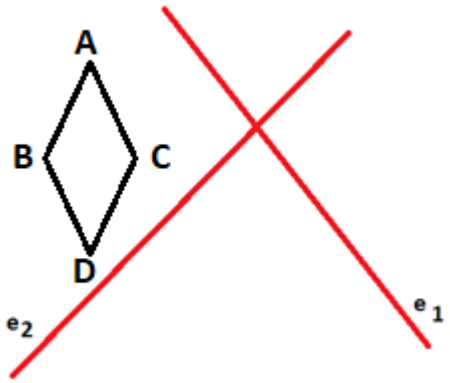


c. Disminuyendo más el ángulo entre los dos espejos, el número de imágenes aumenta.
Completar la siguiente tabla:

Medida del ángulo	N° de imágenes
90°	3
60°	5
45°	
30°…..	

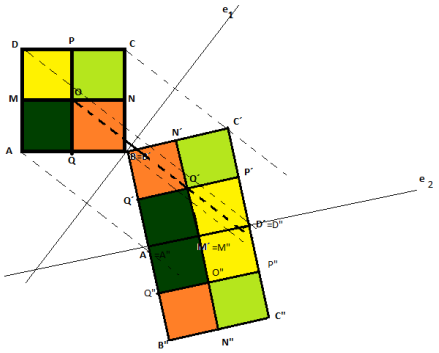
d. ¿Qué sucede si los espejos son paralelos? ¿Cuál es el ángulo que forman estos espejos? Relacionar la respuesta con la expresión anterior.

5. Aplica la siguiente composición de simetrías axiales S_{e1} o S_{e2} (ABCD)



6. La composición (o producto) de dos simetrías axiales, ¿es otra simetría axial? Justificar la respuesta.
Trabaja con GeoGebra o Cabrí para probar con distintas posiciones relativas entre los ejes.

7. Realizar una figura en software, aplicar una composición de dos simetrías axiales (por ejemplo, como se ve en la figura) y verificar todas las invariantes que se pusieron en la tabla anterior.



Definición: *Se llama simetría respecto de un eje e, o simetría axial de eje e, a la transformación del plano en sí mismos (π -> π) tal que:*

- *La imagen de un punto P que no pertenece al eje e, es un punto P´ siendo "e" la mediatriz del segmento PP´.*
- *La imagen de un punto Q que pertenece al eje e, es el mismo punto Q.*

8. a. La simetría es una función del plano en sí mismo. ¿Es biyectiva? Justificar.
b. La composición de simetrías axiales, ¿es biyectiva? Justificar.

Traslación
1. El gallito ciego
a. Un voluntario entre los estudiantes se venda los ojos. El docente marca una cruz en el piso en algún lugar y los compañeros tienen que dar indicaciones al gallito ciego para que llegue a la cruz.
b. Escribir en el pizarrón las "órdenes" dadas para trasladarse al lugar deseado.
c. Definir un vector.

2. a. Demostrar, utilizando un software, que la composición de dos simetrías axiales con ejes paralelos es una traslación. Descubrir el vector correspondiente.
b. Escribir la **definición** de traslación, teniendo en cuenta el punto **a.** y/o las siguientes condiciones (verificarlas con el software):

- La distancia entre dos puntos homólogos es el doble de la distancia entre los ejes.
- El segmento que determinan dos puntos homólogos es perpendicular a los ejes.
- Utilizando el concepto de **vector.**

3. a. Dado un triángulo cualquiera, hallar el correspondiente en una traslación con un vector dado, no paralelo a los lados del triángulo.
b. Representar una traslación de vector PQ como composición de dos simetrías axiales (recordar que PQ es perpendicular a los ejes). (Ayudarse con el software).

c. Si los ejes son coincidentes, ¿cuál es la imagen de un punto P cualquiera fuera de los mismos? ¿Cuál es el vector que identifica esta traslación'? ¿Cómo se denomina esta traslación?
d. ¿Con qué movimiento se debe componer una traslación de vector PQ para obtener la identidad?

Rotación
1. Dos estudiantes toman una soga de aproximadamente 1,5m en cada extremo. Uno de ellos permanece fijo y el otro, gira manteniendo siempre tensa la soga.
a. ¿Qué posibilidad/es de movimiento tiene la persona que gira? ¿Cuánto puede girar? (la persona del centro gira, pero se mantiene en el mismo lugar).
b. Marcar un punto en el piso sobre esa circunferencia imaginaria y que los compañeros den "órdenes" al que gira para que llegue a ese punto.
c. Escribir en el pizarrón los datos necesarios y suficientes para hacer un giro o rotación.
d. Relacionar este movimiento con la composición de dos simetrías axiales cuyos ejes son coincidentes (no necesariamente perpendiculares). Uso de software.

2. Componer dos rotaciones que tengan el mismo centro y luego dos rotaciones que tengan distinto centro. Sacar conclusiones. Usar el software.

Definición: *La rotación o giro de centro O y ángulo α es la composición de dos simetrías axiales de ejes incidentes en O, que forman un ángulo α, si α ≠ 0. La rotación de centro O y ángulo α = 0 es la identidad.*

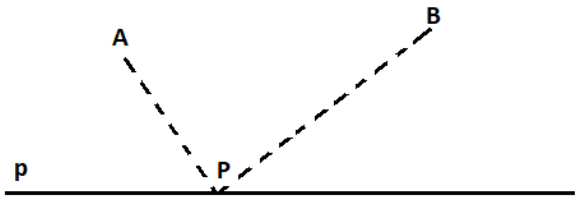
3. Dados dos segmentos que se corresponden en una rotación, determinar el centro de rotación. Analizar todos los casos posibles respecto a las mediatrices de dos segmentos que unen puntos homólogos y que se utilizan para hallar el centro de rotación:
- las mediatrices tienen intersección en un punto
- una mediatriz o ambas no existen
- las mediatrices coinciden
- las mediatrices son paralelas no coincidentes.

Simetría central
1. Realizar con el software una rotación de 180° a una figura F. ¿Se puede llegar de F a F´ por "otro camino"?

2. Probar geométricamente y en forma algebraica (con el Teorema de Pitágoras) que los movimientos rígidos conservan las distancias. Para ello, dibujar un segmento en un sistema de ejes cartesianos y demostrar para:
- Simetría
- Traslación
- Rotación

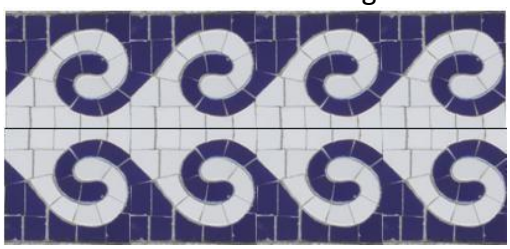
Ayuda: ver cómo conviene ubicar a los ejes cartesianos o el centro de rotación y recordar que una traslación es una composición de simetrías axiales.

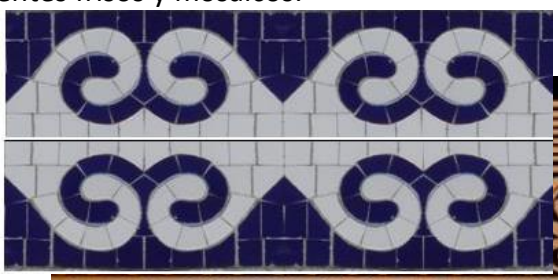
3. Búsqueda del camino mínimo

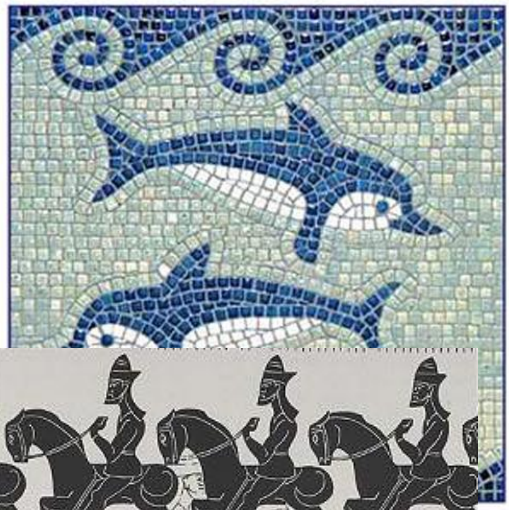


Un niño está jugando con un amigo, a ver quién llega más rápido desde el punto A al punto B, pero en el trayecto tiene que tocar la pared p. Por supuesto que el que corra más rápido tendrá ventaja, pero, suponiendo que los dos corren a la misma velocidad, ¿da lo mismo el recorrido o habrá un camino más corto?

4. Descubre movimientos rígidos en los siguientes frisos y mosaicos:







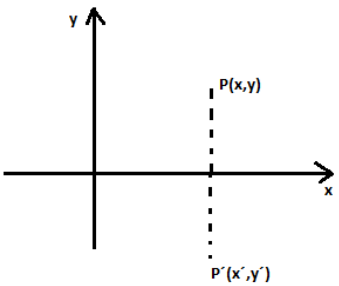
Movimientos rígidos y álgebra

Se puede relacionar a las transformaciones con el álgebra. El puente entre geometría y álgebra es un sistema de ejes cartesianos en el plano.

Sea un sistema de ejes cartesianos ortogonales, un punto P(x,y) y su transformado P´(x´,y´).
Consideremos la simetría de eje x, podemos indicar S_x (x,y) = (x´,y´) tal que x´= x , y´= -y

1. a. Completar la siguiente tabla con los puntos transformados según una simetría de eje x:

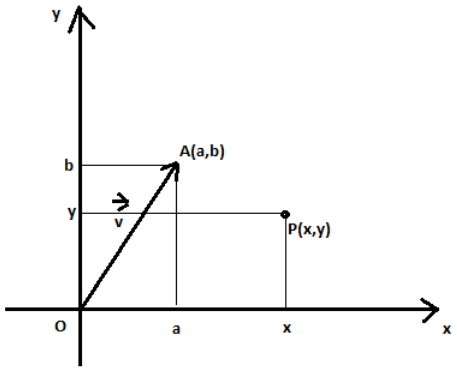
	S_x
(-3,2)	
(3,2)	
(3,-4)	
(-3,-4)	
(0,1)	
(-2,0)	
(0,0)	



b. ¿Cuál es la expresión algebraica (f:((x,y) →…) que define la simetría de eje y?
c. ¿Cuáles son las expresiones algebraicas si el eje elegido es la recta bisectriz del primer y tercer cuadrante?
d. ¿Qué sucede si componemos S_y ° S_x? ¿Cuál será su expresión algebraica?
e. Calcular geométrica y algebraicamente la siguiente composición de simetrías: S_o o S_x.

2. Consideremos una traslación de vector v y sea OA el representante elegido. En el sistema de coordenadas ortogonales (O,x,y) el punto A tiene coordenadas (a,b). Sea P(x,y) un punto cualquiera del plano.

a. ¿Cuáles son las coordenadas de su imagen P´? (usar software)



b. Demostrar geométrica y algebraicamente que la composición de dos traslaciones es una traslación cuyo vector es la suma (vectorial) de los vectores dados.

c. La función identidad es una traslación, definida por las ecuaciones x´=x+a y´=y+b. ¿Cuáles son los valores de a y b?

d. Mostrar geométrica y algebraicamente que, dada una traslación T existe una traslación opuesta tal que, componiéndola con T da como resultado la identidad.

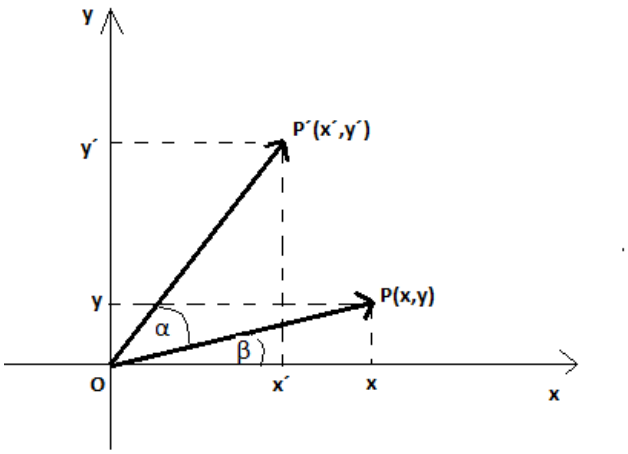
3. Podemos hacer un estudio similar con las rotaciones.

Sea la rotación $R_{(o,\alpha)}$ (P) = P´

P tiene coordenadas (x,y)

P´ tiene coordenadas (x´,y´)

a. Expresar x, y, x´, y´ en función del ángulo de giro α y del ángulo β que forma OP con el eje de abscisas.



b. Obtener las expresiones algebraicas para estos casos particulares:

$R_{(o,30°)}$; $R_{(o,180°)}$

POSIBLES SOLUCIONES Y COMENTARIOS

Simetría axial

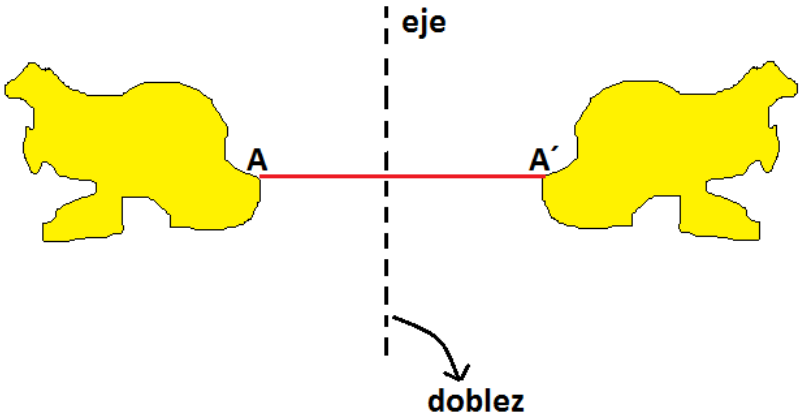
1. a. Se aleja.

b. La izquierda.

c. Antihorario.

d. Si está a la izquierda se ve a la derecha y viceversa.

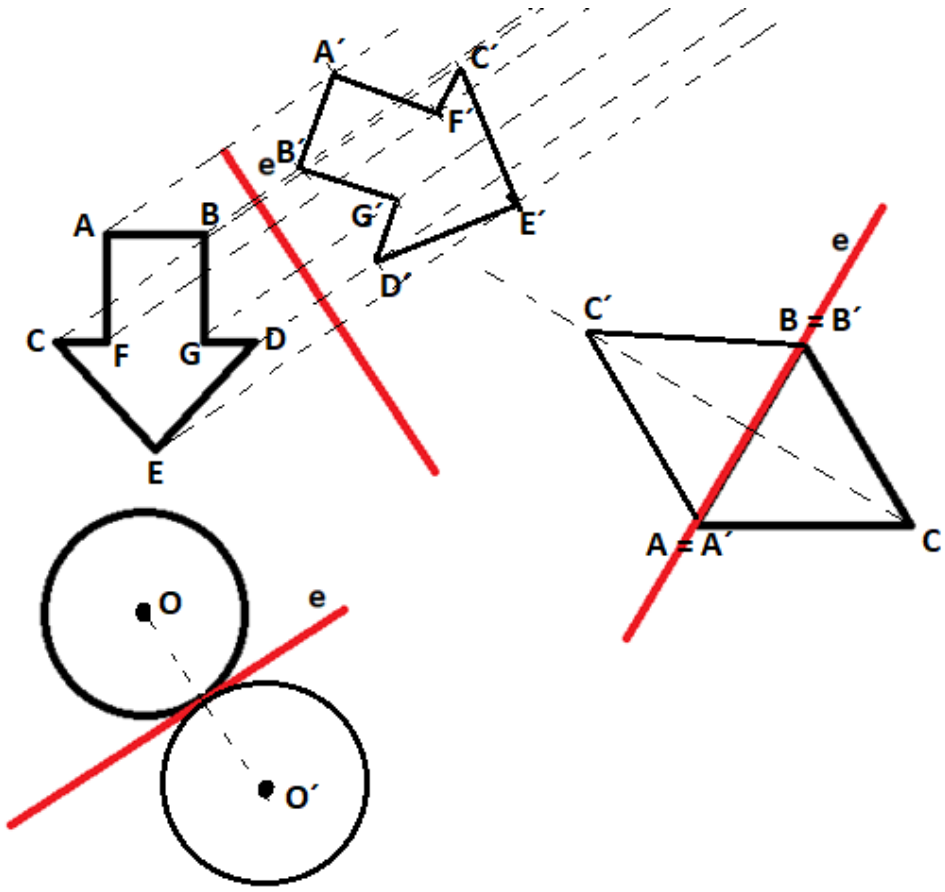
2. a.b.



c. Para hallar el punto homólogo A´ de un punto A se debe trazar un segmento perpendicular al doblez y a la misma distancia de A al doblez, marcar el punto A´ del otro lado del mismo.

La simetría axial produce el mismo efecto que reflejarse en un espejo. En este trabajo trataremos geometría plana, pero vale la analogía.

3.



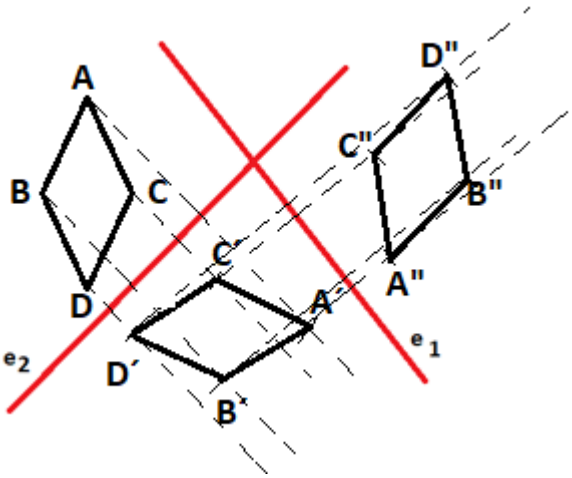
En las construcciones de los movimientos rígidos se les pueden hacer recomendaciones como las siguientes:

- *Tener en cuenta las invariantes, por ejemplo, incidencia y orden, conservación de las distancias, etc. Esto ayudará a comprobar si se está siguiendo el camino correcto.*
- *Las líneas auxiliares (perpendiculares al eje en este caso) hacerlas suaves y con línea punteada, para no confundirlas con las líneas que determinan la figura y su transformada.*
- *Nombrar inmediatamente cada punto transformado. Luego, al respetar el orden como invariante no va a haber dificultad para unir los puntos que se corresponden si la figura es un poco compleja.*
- *Para hacer la transformada de una circunferencia basta con buscar la imagen del centro y conocer el radio.*
- *Antes de empezar con una construcción, calcular en forma estimativa dónde quedará la figura transformada, para que no se nos "escape de la hoja".*

4. a. Depende del ángulo en que están posicionados los espejos. Con un ángulo de 180° se ve una sola imagen. A medida que disminuye el ángulo se ven más figuras. Si el ángulo de incidencia es 0°, esto quiere decir que los espejos están paralelos y se ven infinitas imágenes (por ejemplo, pasa esto en un ascensor que tiene espejos laterales).
b. Con 2 espejos a 90° se ven 3 imágenes más el objeto. Con 2 espejos a 60° se ven 5 imágenes más el objeto. Las imágenes reflejadas producen un efecto de un giro de 360° dividido en sectores de acuerdo al ángulo. Por ejemplo 360°:60° = 6, son 5 imágenes más del objeto real. Generalizando, si el ángulo es de n°, entonces (360°:n° - 1) es el número de imágenes que se ven.
c.

Medida del ángulo	N° de imágenes
90°	3
60°	5
45°	7
30°	11
n°	360°:n° - 1

d. Si los espejos son paralelos, como ya se dijo anteriormente, se ven infinitas imágenes. Si lo relacionamos con la fórmula anterior quedaría 360°:0° - 1. No se puede dividir por 0, pero si tomamos valores muy cercanos al 0 y dividimos el resultado se hace cada vez mayor. Entonces se dice que, en el límite, cuando prácticamente tocamos el 0, el resultado va a ser infinitamente grande (o infinito).
5.



Como se verá se efectuó primero la simetría de eje e_2 porque, por convención, se utiliza la simbología de la composición de funciones: S_{e1} o S_{e2} (ABCD) ya que de hecho, son funciones.

6. La simetría axial invierte la figura. Si se componen 2 simetrías axiales, la figura transformada vuelve a quedar con la misma orientación, por lo tanto, nunca puede ser una simetría axial.

7. *Una vez construida la composición de simetrías, verificar si se conservan las distancias, los ángulos, el orden, y demás invariantes.*

8. Sí, todos los movimientos rígidos son funciones biyectivas ya que a cada punto del plano le corresponde un único punto del mismo plano.

Traslación

1.a.b.c. Las órdenes que los compañeros pueden ir dando son, por ejemplo: "adelante 2 pasos", "atrás 3 pasos", "a la izquierda 1 paso", "a la derecha 2 pasos", etc. Es decir, hay que indicar la orientación y la distancia.

d. Todos estos datos se pueden resumir en un elemento geométrico que se denomina vector.

Definición: *Un vector es un segmento orientado. Está identificado por un módulo o distancia (longitud), una dirección y un sentido.*

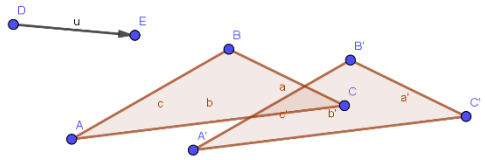
2.a. *Al realizar la composición de dos simetrías axiales con ejes paralelos a una figura cualquiera, se observará que la figura transformada conserva la orientación. Basta encontrar un punto relevante de la figura, unirlo con su transformado, y se tendrá el vector de traslación. También se podrá comprobar que su longitud es el doble de la distancia entre los dos ejes de simetría. Verificar la traslación con ese vector en otros puntos significativos con sus respectivas imágenes.*

Definición:

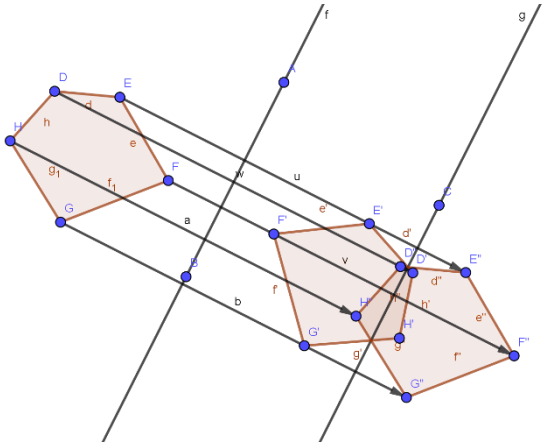
- La composición de dos simetrías axiales de ejes paralelos es una traslación. Se cumple que la longitud del vector de traslación es el doble de la distancia entre los ejes y resulta perpendicular a los mismos.

- Una traslación de vector v es un movimiento que trasforma cualquier punto P del plano en un punto P´ tal que el vector PP´ es equipolente al vector v.

3. a.

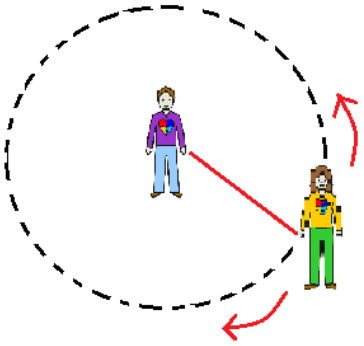


b.

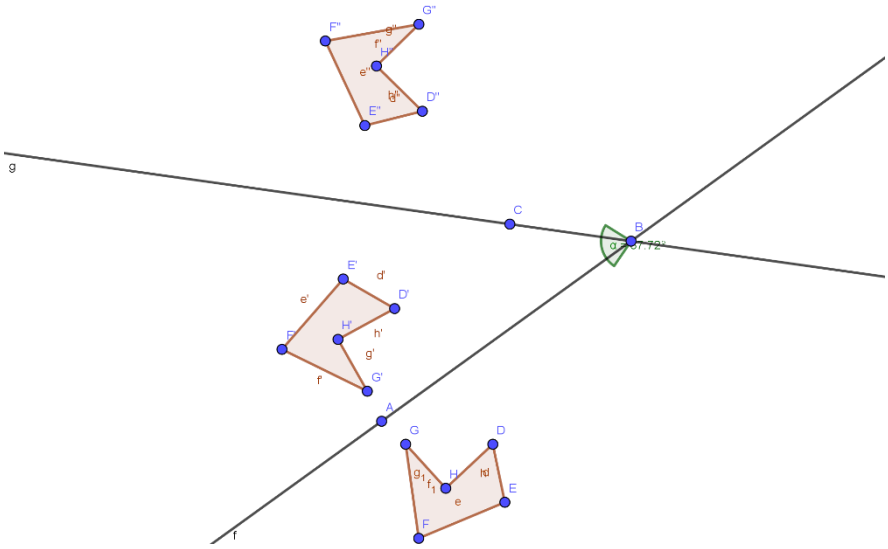


c. Si los ejes son coincidentes, la composición de simetrías axiales de un punto P cualquiera resulta ser el mismo punto P" = P. Esta traslación se denomina identidad y el vector correspondiente es el vector nulo.
d. con el vector QP.

Rotación

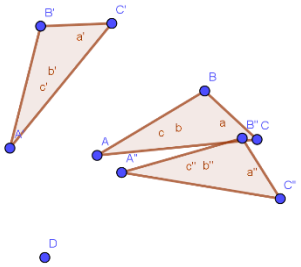


1.a. Puede girar en dos sentidos. Para la persona puede ser a la derecha o a la izquierda, pero para el que está "afuera" de la situación esta indicación no sirve. Como se trata de un giro podemos hacer la analogía con las agujas de un reloj, o sea en sentido horario o en sentido anti-horario.
b. Hay que darle dos datos: el sentido y "cuántos pasos".
c. Se debe tener un centro como referencia (podemos seguir imaginándonos la soga estirada), el sentido para donde se debe girar y cuánto. Como es un giro esto se puede medir con un ángulo. Entonces la rotación se identifica por el centro y por un ángulo orientado (positivo o negativo). En símbolos: $R_{(o,+/-\alpha)}$.
d.



La composición de dos simetrías axiales con ejes incidentes es una rotación cuyo centro es la intersección de los dos ejes y su ángulo de rotación mide el doble del ángulo formado por los dos ejes. El sentido lo da el movimiento de la figura y su transformado.

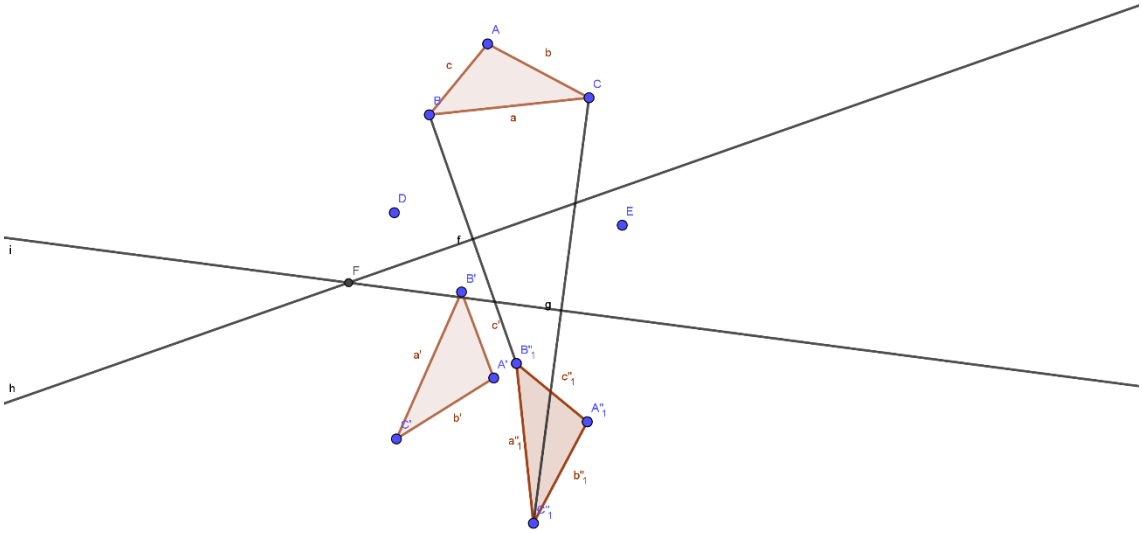
2.



$R_{(D,-60°)}$ o $R_{(D,+45°)}$ (ABC) = $R_{(D,-15°)}$

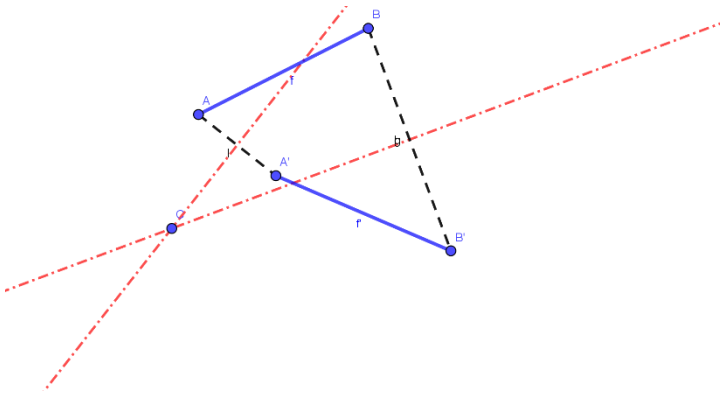
La composición de dos rotaciones con un mismo centro es una rotación del mismo centro cuyo ángulo de rotación es la suma de los ángulos de las rotaciones dadas.

$R_{(E,+30°)}$ o $R_{(D,-120°)}$ (ABC) = $R_{(F,-90°)}$ (ABC)

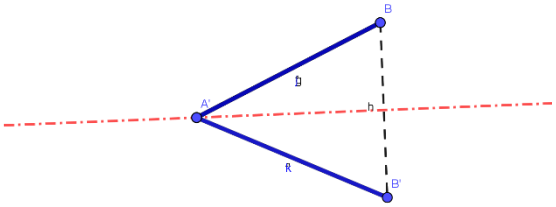


La composición de dos rotaciones de distinto centro es otra rotación, cuyo ángulo de giro es la suma de los ángulos de giros dados y el centro de rotación de halla de la siguiente manera: se trazan los segmentos que unen dos pares de puntos homólogos, luego se hallan las mediatrices de esos segmentos. El punto de intersección de las dos mediatrices es el centro de rotación resultado de esta composición.

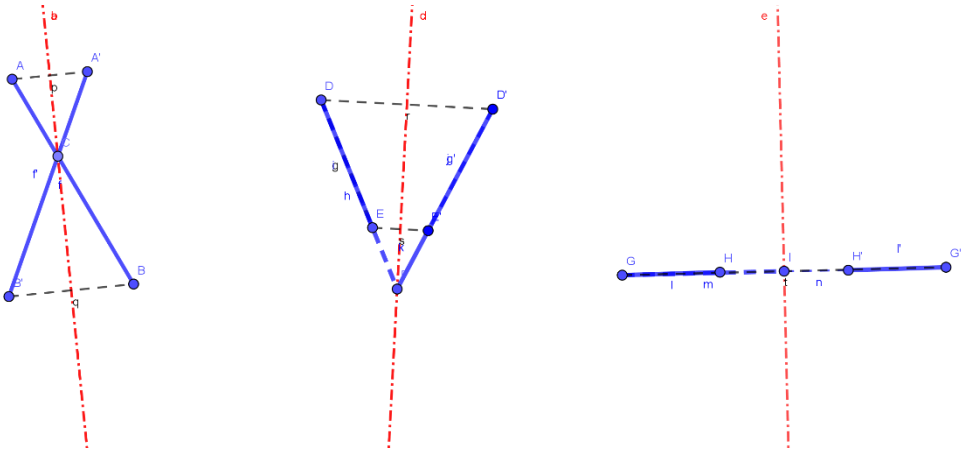
3. Las mediatrices de los segmentos que unen puntos homólogos se cortan en un punto:



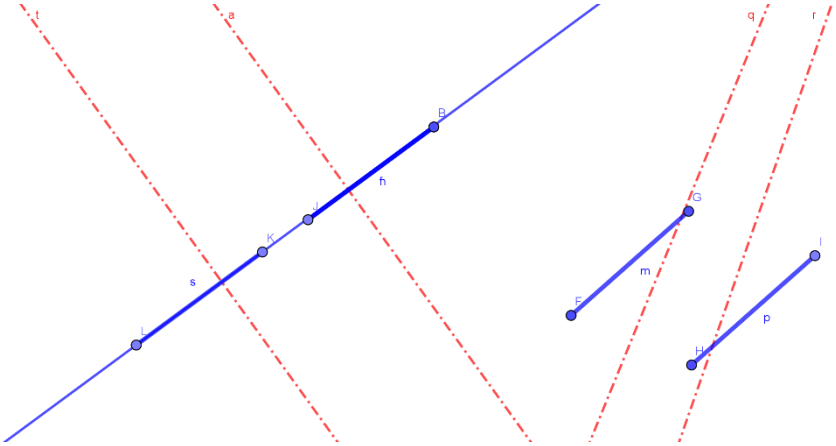
Una mediatriz o ambas no existen:



Las mediatrices coinciden (es el caso en que la intersección de las rectas que contienen a los segmentos es el centro de rotación)

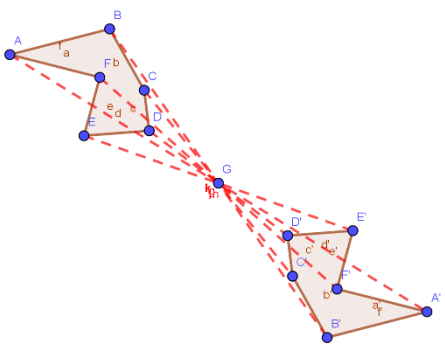


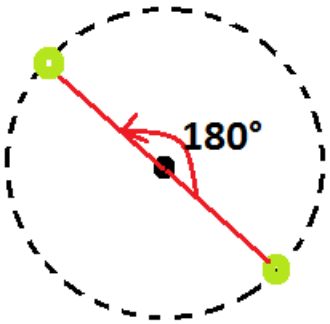
Las mediatrices son paralelas no coincidentes por lo tanto no existe centro de rotación, esto se debe a que los segmentos (que son paralelos) no se corresponden por una rotación.



Simetría central

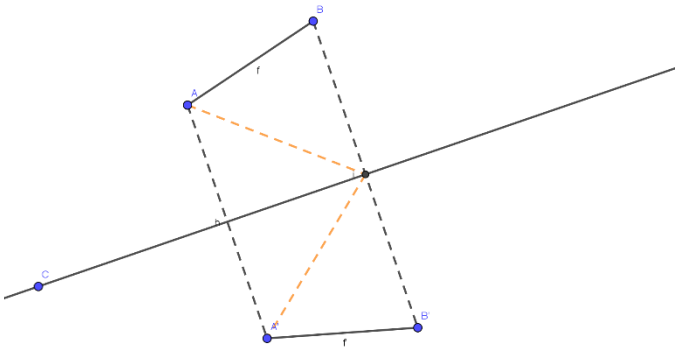
1.





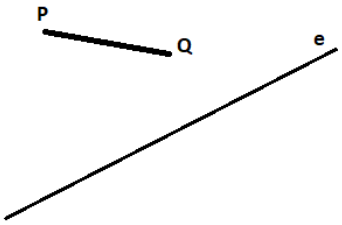
Si los estudiantes no perciben que, uniendo los pares de puntos homólogos, todos ellos pasan por el centro, se los puede inducir a ello. Verán además que la distancia de cada punto al centro de rotación es la misma que del centro a ese punto transformado. Entonces se puede construir directamente la figura transformada por una rotación de 180° de una manera mucho más sencilla: uniendo cada punto con el centro, prolongando, y a la misma distancia encontrar el punto transformado. Este movimiento es equivalente a una rotación de 180° y se denomina Simetría central.

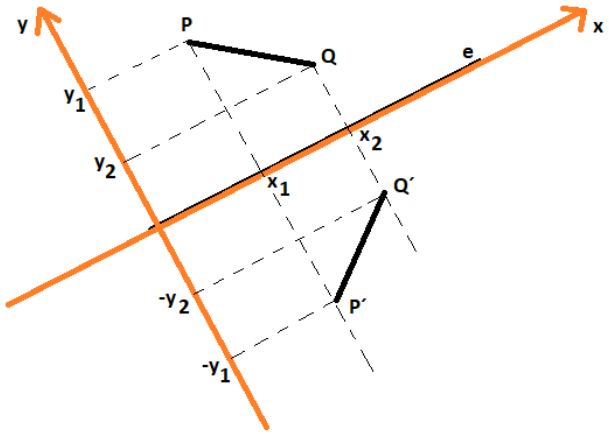
2.



Geométricamente:
Utilizando las propiedades de simetría axial:
AHi = A´Hi (lado-ángulo-lado)
ABi = A´B´i (lado-ángulo-lado)
Por lo tanto, el segmento AB es congruente con el segmento A´B´, o sea que conserva la distancia.

En forma algebraica:

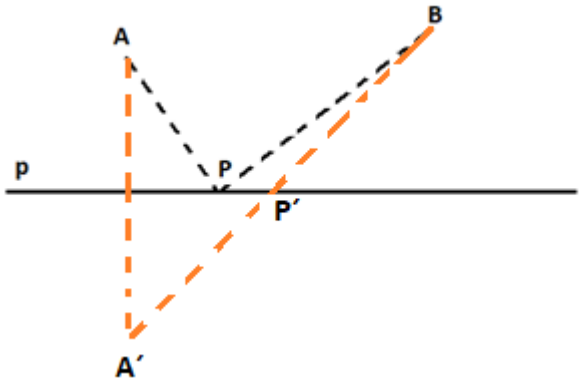




Se pueden colocar los ejes cartesianos convenientemente de tal manera que el eje de abscisas coincide con el eje de simetría.
Entonces, sean P (x_1 , y_1) y Q(x_2 , y_2)
P´= S_x (P) = (x_1 , $-y_1$)
Q´= S_x (Q) = (x_2 , $-y_2$)
La distancia d(P,Q) = $\sqrt{(x_2 - x_1)2 + (y_2 - y_1)2}$ (1)
d(P´Q´) = $\sqrt{(x_2 - x_1)2 + [-y_1 - (-y_1)]2}$ = $\sqrt{(x_2 - x_1)2 + (y_1 - y_2)2}$ (2) es como $(y_2 - y_1)^2 = (y_1 - y_2)^2$ (por estar ambos miembros elevados al cuadrado el valor absoluto de ambas diferencias es el mismo)
es (1) = (2), ambas distancias se conservan.

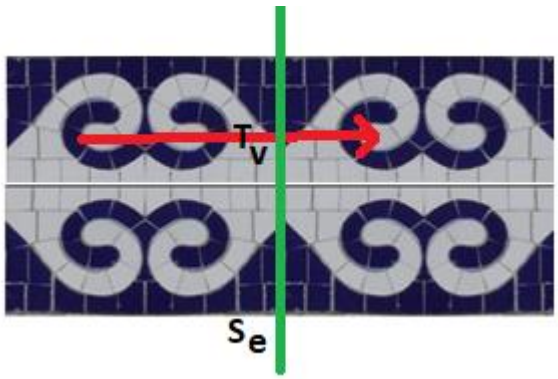
Se demostró que la simetría axial conserva las distancias (siempre se puede utilizar la estrategia de ubicar los ejes cartesianos a conveniencia, como se hizo). **Como la traslación es una composición de cantidad par de simetrías axiales con ejes paralelos y la rotación es una composición de simetrías axiales con ejes incidentes, la demostración anterior se hace extensiva para la traslación y la rotación.**

3.



Sea A´= S_p (A)
La longitud de APB = long A´PB (la simetría conserva las distancias).
Pero A´PB puede minimizarse "cambiando" P por P´∈ p y al segmento A´B. Luego el recorrido más corto es A´P´B porque es línea recta.

4. *Este problema es abierto, pueden resolver de distintas maneras con distintos resultados.*
Por ejemplo, en el siguiente friso pueden encontrar:



Puede ser una traslación de vector v, o una simetría axial de eje e, o algún otro movimiento.

La siguiente imagen puede suponer una rotación de 180° o simetría central, pero al tratar de unir los puntos homólogos no se cruzan en un mismo punto.

Podemos suponer que es una composición de una traslación con una simetría central.

Se pueden encontrar traslaciones y simetrías centrales (o rotaciones de 180°).

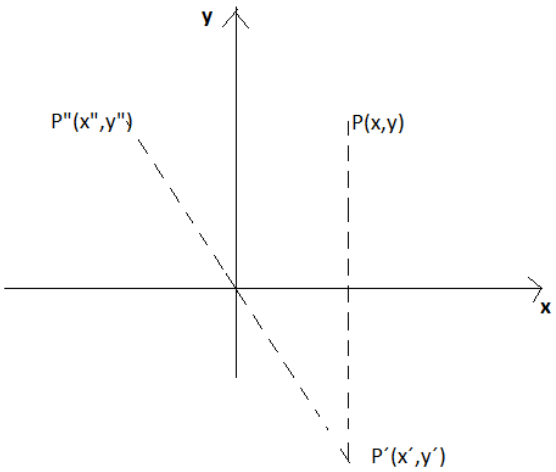
Movimientos rígidos y álgebra

1.a.

	S_x
(-3,2)	(-3,-2)
(3,2)	(3,-2)
(3,-4)	(3,4)
(-3,-4)	(-3,4)
(0,1)	(0,-1)
(-2,0)	(-2,0)
(0,0)	(0,0)

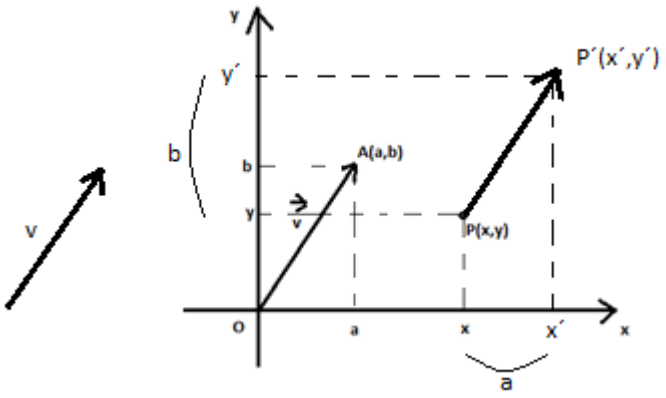
b. El eje de simetría es el eje de abscisas: f: ((x,y) ->(x,-y))

d. $S_y \circ S_x = S_o$ ó $R_{(o,+/-180°)} = (-x,-y)$
e. Geométricamente: S_o o $S_x = S_y$



Algebraicamente:
S_o o S_x (x,y) = S_o (x´,y´) = (x", y")
Siendo x´= x y´ = -y
x" = -x´ y" = -y´
Por lo tanto x" = -x y" = y que es la expresión algebraica de S_y

2.
a.

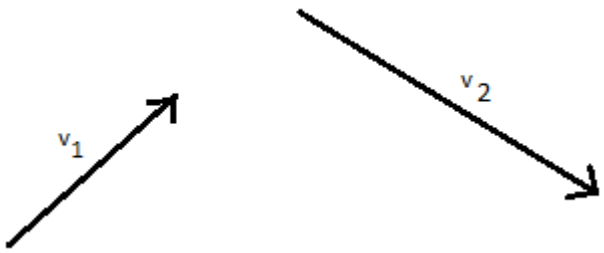


Las coordenadas de la imagen son:
x´ = x + a
y´ = y + b (1)

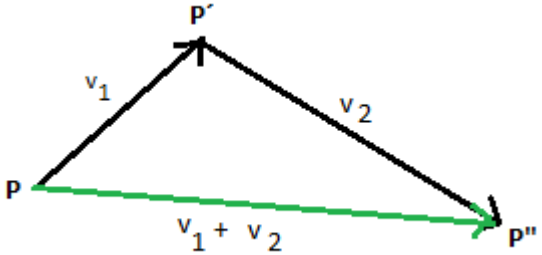
O sea:
T_{OA} (x,y) = (x+a,y+b)

El sistema (1) define la traslación de vector v.

b. Componiendo dos traslaciones de vector v_1 y v_2, por ejemplo:



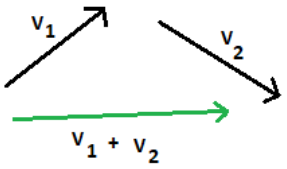
Se puede realizar la composición en forma geométrica, por ejemplo, buscando un punto P cualquiera y aplicamos las dos traslaciones en forma sucesiva.

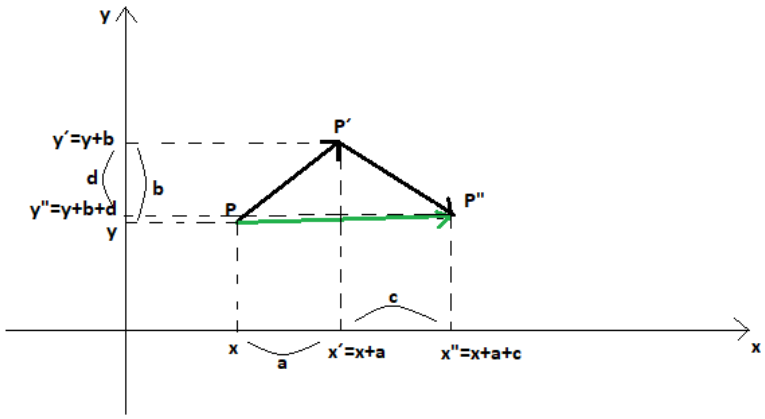


La composición de dos traslaciones de vectores v_1 y v_2 es una traslación cuyo

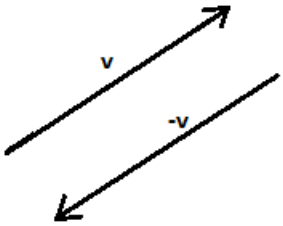
vector es la suma vectorial de los vectores dados.

Desde el punto de vista algebraico:
T_{v1} (x,y) está definida por x´ = x + a ; y´ = y + b
T_{v2} (x´ ,y´) = (x",y") está definida por T_{v2} (x+a, y+b) = (x+a+c, y+b+d)
Entonces la composición de traslaciones T_{v1} o T_{v2} es una traslación T_{v1+v2} cuyas ecuaciones son x´= x + (a+c) e y´= y + (b+d)





c. Identidad: los valores son a = b = 0 => x´= x ; y´= y.
d. La traslación opuesta es aquella que tiene vector opuesto (igual magnitud, igual dirección, sentido contrario).
T_v o T_{-v} = Id



Ecuaciones:
x´ = x + a ; y´= y + b
x" = x + a – a = x
y" = y + b – b = y

3. a.

$$sen\beta = \frac{y}{\left|\overrightarrow{OP}\right|}$$

$$cos\beta = \frac{x}{\left|\overrightarrow{OP}\right|}$$

(1) (convendremos en señalar que $\left|\overrightarrow{OP}\right|$ es el módulo del vector OP)

Además:

$$sen(\alpha+\beta) = \frac{y'}{\left|\overrightarrow{OP'}\right|} = \frac{y'}{\left|\overrightarrow{OP}\right|} \; pues \; \overline{OP} =_c \overline{OP'}$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{x'}{\left|\overrightarrow{OP'}\right|} = \frac{x'}{\left|\overrightarrow{OP}\right|}$$

Apliquemos las fórmulas de seno y coseno de la suma:

$$\frac{y'}{\left|\overrightarrow{OP}\right|} = sen(\alpha+\beta) = sen\alpha.cos\beta + sen\beta.cos\alpha$$

Por lo tanto, por (1) es:

$$\frac{y'}{\left|\overrightarrow{OP}\right|} = \frac{x}{\left|\overrightarrow{OP}\right|} sen\alpha + \frac{y}{\left|\overrightarrow{OP}\right|} cos\alpha$$

$$\frac{x'}{\left|\overrightarrow{OP}\right|} = \cos(\alpha+\beta) = cos\alpha.cos\beta - sen\alpha.sen\beta$$

Por lo tanto, por (1) es:

$$\frac{x'}{\left|\overrightarrow{OP}\right|} = \frac{x}{\left|\overrightarrow{OP}\right|} .cos\alpha - \frac{y}{\left|\overrightarrow{OP}\right|} .sen\alpha$$

Simplificando los denominadores de ambos miembros, obtenemos las ecuaciones de $R_{(O,\alpha)}$:

$$\begin{cases} x' = x\,.cos\alpha - y\,.sen\alpha \\ y' = x\,.sen\alpha + y\,.cos\alpha \end{cases}$$

b.

α = 30° sen30° = ½ ; cos30° = $\sqrt{3}/2$

x´= x . cos30° - y . sen30°

y´= x . sen30° + y . cos30° , por lo tanto:

x´= $\sqrt{3}/2$. x – ½ y

y´= ½ x + $\sqrt{3}/2$ .y

α = 180° sen180° = 0 ; cos180° = -1

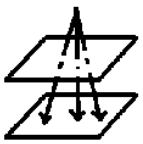
x´= x . cos180° - y . sen180°

y´= x . sen180° + y . cos180° por lo tanto:

x´= - x

y´= -y, que es también la expresión de la simetría central.

SEMEJANZA (planos paralelos-foco de luz)



Pensando otra vez en el recurso de las "sombras", el caso en donde los planos son paralelos pero la luz proviente de un foco, la figura obtenida sufre algunos cambios. Veamos cómo se puede trabajar esta situación en el plano.

1. ¿Qué se entiende por "semejanza"? ¿Cuándo se puede considerar que dos figuras son semejantes?

2. Diseñar un método para dibujar rectángulos semejantes a partir de una diagonal o de dos diagonales

3. Discutir las siguientes afirmaciones:

a. "Dos rectángulos son semejantes si tienen la misma medida de largo y ancho, pero con unidades diferentes".

b. “Dos rectángulos son semejantes si la razón entre sus largos y sus anchos son respectivamente iguales: $l_1/l_2 = a_1/a_2$”.
c. “Dos rectángulos son semejantes si en cada uno la razón entre el largo y el ancho es la misma: $l_1/a_1 = l_2/a_2$”. Justificar matemáticamente.

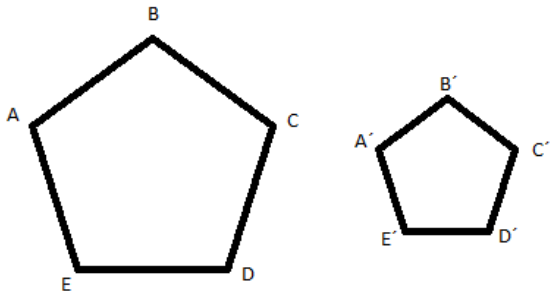
4. ¿Valdrán estas definiciones de semejanza para los paralelogramos? ¿Será la proporcionalidad de los lados una condición suficiente para afirmar que dos paralelogramos son semejantes? Justificar.

5. Extender la definición de semejanza a cualquier otro polígono.

6. ¿Qué significa que un televisor sea de 20”? ¿Qué es lo que mide 20”? ¿Y si fuera de 24”, tendría la misma forma que el anterior necesariamente? (o sea, ¿sería semejante? Justificar.

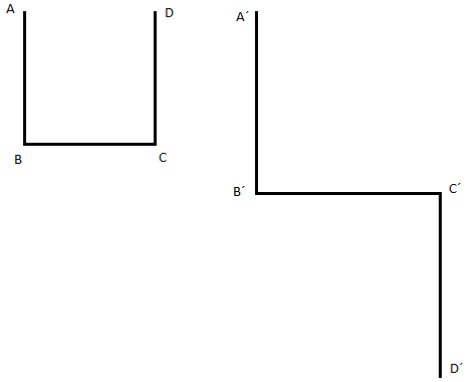
7. Para comprobar que dos triángulos son semejantes, ¿es necesario verificar que tenga los tres lados correspondientes proporcionales y los tres ángulos homólogos congruentes? Ver condiciones necesarias y suficientes.

8. Todo polígono puede triangularse. Utilizar los criterios de semejanza de triángulos para verificar que estos dos polígonos regulares son semejantes:



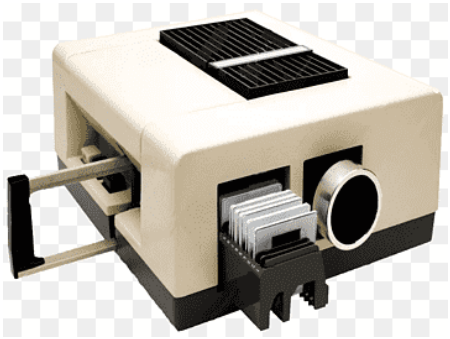
9. Buscar ejemplos en la vida real donde se utilicen o vean figuras semejantes.

10. Atendiendo a la definición anterior de polígonos semejantes, ¿qué se puede decir de estas dos figuras? ¿Son semejantes?! (Teniendo en cuenta que sus lados son proporcionales y los ángulos rectos):



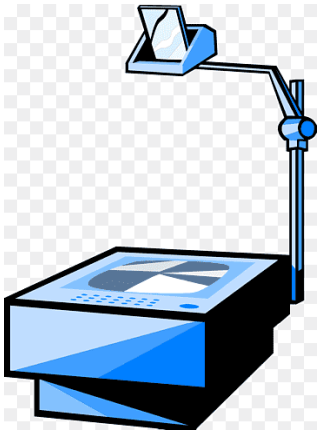
¿Qué dirías al respecto?

Se puede ejemplificar el efecto de la semejanza cuando se miraban diapositivas con un proyector o retroproyector, o cañón o con la proyección de una película. Las imágenes, al ser proyectadas sobre una pantalla, en estos casos se amplía considerablemente para que se puedan ver mejor.



Proyector multimedia.

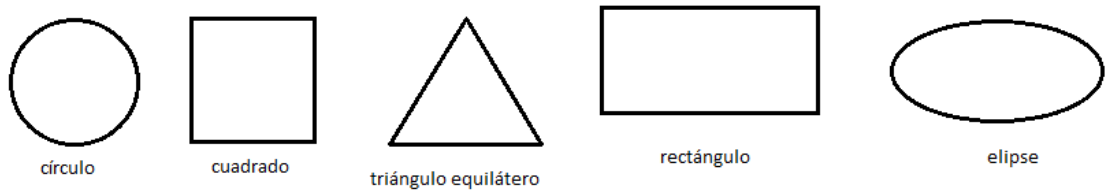
Retroproyector.



11. Completar las siguientes proposiciones:
i) Para que dos triángulos sean semejantes basta con que tengan …….
ii) Para que dos círculos sean semejantes……
iii) Basta que dos cubos …… para que sean semejantes.
iv) Es suficiente que dos segmentos …… para que sean semejantes.
v) Si dos cilindros ……, entonces son semejantes.
vi) Para que dos conos sean semejantes basta ……
vii) Si dos ángulos……, entonces son semejantes.
viii) Para que dos rectas sean semejantes ……

12. Hay muchas películas de ciencia-ficción en donde se transgreden reglas de la física y de la matemática (si pensamos en las invariantes de la semejanza).
En la película "Querida agrandé al bebé", ¿puede ese niño medir 20 metros? ¿Qué complicaciones podría tener? (ver https://new.gpdmatematica.ar sección "recursos para el aula-problemas")

13. Una persona dijo idear un modo de lograr figuras semejantes a una dada agregando una banda del mismo ancho en todo el contorno de la figura. ¿Es correcto este razonamiento? Verificar el método en las siguientes figuras y sacar conclusiones:

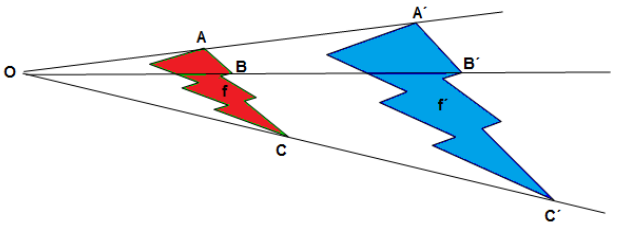


Justificar la respuesta en forma algebraica.

Vamos a introducir un nuevo movimiento (no rígido) que nos permitirá dar una definición clara de la Semejanza: se denomina **homotecia**. Este movimiento agranda o achica la figura, pero no la deforma, obteniéndose así una figura que denominamos semejante. Si a esta figura la componemos con un movimiento rígido, (no necesariamente), cuyo efecto es cambiarla de lugar, se obtiene una **semejanza**.

Comenzaremos por definir a la homotecia:

Definición: *Dado un punto O y un número real k ≠ 0, se llama homotecia de centro O y razón k a la transformación puntual que a un punto P cualquiera le hace corresponder un punto P´ tal que:* $\overrightarrow{OP} = k \cdot \overrightarrow{OP'}$ *y se simboliza* $H_{(O,k)}(P) = P'$



Podríamos decir que llevamos el efecto de planos paralelos y foco, a un plano.
Como los movimientos rígidos dejan invariante todas las propiedades geométricas y métricas, es cuestión de centrarse en las invariantes de la homotecia.

Si la razón de homotecia es mayor que 1 la figura se agranda, si es igual que 1 queda igual, si 0<k<1 se achica. Si es negativa la figura queda invertida, es decir, como una simetría central del mismo centro y con respecto a una homotecia de razón |k|.

14. a. ¿Qué se puede decir de la homotecia $H_{(o,1)}$? ¿Y de la $H_{(o,-1)}$?
b. ¿Cuál es la imagen del centro O a través de la $H_{(o,k)}$?
c. Las homotecias, ¿son funciones biyectivas?

15. ¿Cuál es la imagen de una semirrecta? Analizar si k>0 y si k<0.

16. Si el segmento A´B´ es la imagen del segmento AB a través de una homotecia, ¿qué se puede decir de la razón A´B´/AB? Justificar la respuesta.

17. Realizar la composición de dos homotecias del mismo centro y luego de distinto centro (con el software). Sacar conclusiones.

18. Demostrar que la homotecia mantiene las siguientes invariantes (utilizar software):

- Incidencia y alineación
- Orden.
- Paralelismo.
- Perpendicularidad.
- Ángulos.

Ayuda: la siguiente figura representa la homotecia $H_{(o,k)}$ (F). Considerar los triángulos OAB y OA'B':

Son invariantes relativas el área ($A' = k^2.A$) y la longitud (proporcionalidad con factor k). Si estuviéramos en 3 dimensiones (en el espacio) el volumen aumentaría como el cubo de la razón: $V' = k^3 . V$.

19. Nos queda relacionar la semejanza con el álgebra.
a. En un sistema de ejes cartesianos ortogonales, ¿cuáles son las ecuaciones de la semejanza?
$x' = ...$
$y' = ...$
b. Dibujar, en un sistema de ejes cartesianos, un triángulo ABC y aplicarle la transformación propuesta en el punto a., sabiendo que la razón de semejanza es 1,5. Utilizando estas ecuaciones dibujar un polígonos en un sistema de ejes cartesianos y aplicarles transformaciones de semejanza, por ejemplo: $x' = 3,5x$; $y' = 3,5y$. Verificar las invariantes.

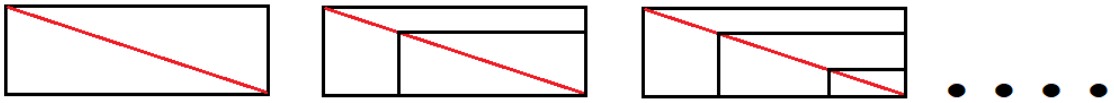
20. Al aplicar la homotecia a una figura poligonal, ¿se tuvo que trabajar con los ángulos? ¿Se tuvo que medir lados? ¿Cómo resultan los lados correspondientes de figuras poligonales que se corresponden por una homotecia?

21. En el caso de figuras curvilíneas, ¿cuántos puntos homotéticos se deben buscar para lograr exactamente la figura transformada?

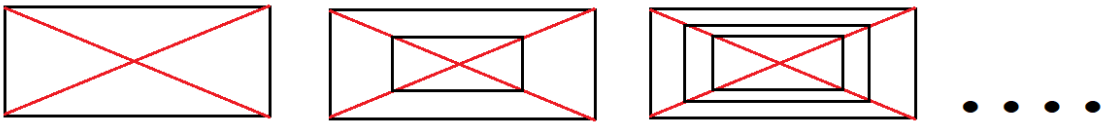
22. ¿Cómo se puede verificar que dos figuras no poligonales son semejantes?

POSIBLES SOLUCIONES Y COMENTARIOS
1. Producción libre*. Lo estudiantes podrían decir que figuras semejantes son aquellas que son parecidas, que tienen la misma forma, pero más grandes o más chicas, etc.*

2.



Se trazan paralelas a los lados que se crucen en un punto de la diagonal. En forma análoga, se trazan paralelas a los lados que se crucen en puntos de las diagonales.



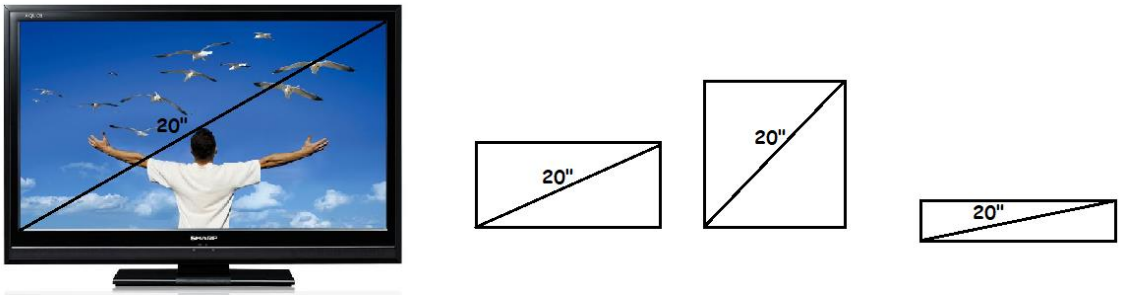
Fácilmente se puede demostrar que los lados correspondientes son proporcionales utilizando el Teorema de Thales, por consiguiente, los rectángulos son semejantes.

3. a. Verdadero. Al pasar las dos cantidades a otra unidad, cambia la medida, pero se mantiene la proporcionalidad. Por ejemplo, si los lados de un rectángulo miden 30cm y 50cm, y tenemos otro rectángulo cuyos lados miden 30mm y 50mm, se mantiene la proporción: pasando todo a la misma unidad quedaría 30/300 = 50/500.
b. Verdadero. $l_1/l_2 = a_1/a_2 = k$. Quiere decir $l_2.k = l_1$ y $a_2.k = a_1$. Por lo tanto, son proporcionales.
c. Verdadero. : $l_1/a_1 = l_2/a_2 \Rightarrow a_1.l_2 = l_1.a_2 \Rightarrow l_2/l_1 = a_2/a_1$ (caso anterior).

4. No. El caso de los rectángulos es particular porque éstos conservan siempre los ángulos rectos. En un paralelogramo los ángulos pueden variar, por lo tanto, hay que tener en cuenta estos últimos. Es decir, además de tener los lados correspondientes proporcionales, los ángulos homólogos deben ser congruentes.

5. Lo mismo sucede con cualquier otro polígono: sus lados correspondientes deben ser proporcionales y sus ángulos homólogos congruentes.

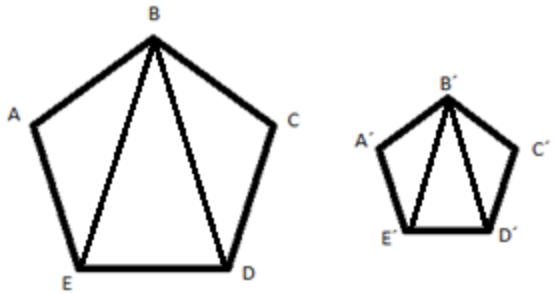
6. Esa medida en pulgadas determina la longitud de la diagonal de la pantalla. Esto solo no asegura que las pantallas de los televisores sean semejantes. Es más, puede suceder que dos televisores sean de 20”, por ejemplo, y sin embargo sus pantallas no ser iguales.



Es necesario dar un dato más para que las pantallas sean iguales (teniendo la misma medida de diagonal), por ejemplo, el ángulo que forma ésta con la horizontal, o la medida de alguno de sus lados.

7. No es necesario. De manera análoga a los casos de congruencia de triángulos, para que dos triángulos sean semejantes éstos deben cumplir las siguientes condiciones necesarias y suficientes:
- los tres lados correspondientes proporcionales o
- dos ángulos congruentes o
- dos lados correspondientes proporcionales y el ángulo comprendido congruente.

8. Todo polígono puede triangularse. Los triángulos homólogos tienen los ángulos congruentes, por lo tanto, son semejantes. Luego, los ángulos correspondientes entre los dos polígonos son congruentes, entonces son semejantes y sus lados son proporcionales.



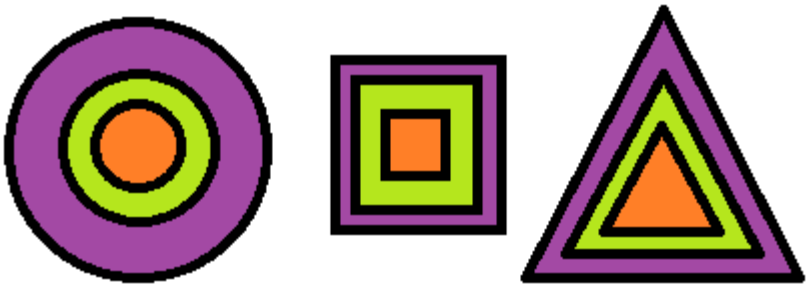
9. Producción libre.

10. No son semejantes. En algunos casos la definición anterior (lados proporcionales y ángulos congruentes) es insuficiente.

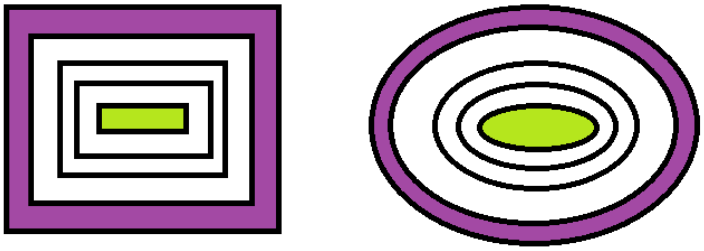
11. i) Para que dos triángulos sean semejantes basta con que tengan: dos ángulos respectivamente congruentes, o los tres lados respectivamente proporcionales, o dos lados proporcionales y el ángulo comprendido congruente.
ii) Dos círculos siempre son semejantes.
iii) Dos cubos siempre son semejantes.
iv) Dos segmentos siempre son semejantes.
v) Basta con que tengan los diámetros de las bases y las alturas respectivamente proporcionales para que dos cilindros sean semejantes.
vi) Ídem al anterior.
vii) Dos ángulos deben ser congruentes para ser semejantes.
viii) Dos rectas son siempre semejantes.

12. En “Querida agrandé al bebé”, el niño llega a medir 20 metros. Comparándolo con un niño normal de esa misma edad se puede calcular el factor de escala. Pero….¡las dimensiones de volumen crecen como el factor al cubo! Y por ende el peso (estamos suponiendo que se trata de la misma sustancia (sino, volumen y peso no son equivalentes). Entonces, haciendo unos simples cálculos se puede ver, por ejemplo: el cuello no podría soportar la cabeza porque es la sección transversal del mismo que la sostiene (y ésta creció en forma cuadrática), o sea que debería tener un cuello mucho más ancho que su cabeza. Un estudio similar se puede hacer respecto a la sección transversal de los huesos de las piernas, no podrían nunca sostener el peso del niño (que creció en forma cúbica).

13. En algunas figuras sí y en otras no. Por ejemplo, el círculo, triángulo equilátero y cuadrado no hay problema porque al tener todos los lados iguales, el aumentar una cantidad constante no afecta en la proporcionalidad, y el círculo va a seguir siendo círculo si se le aumenta el radio:



Pero si los lados de la figura no son congruentes o sus diámetros tampoco lo son (como en la elipse), hay un problema: dos longitudes van a ser proporcionales si se las multiplica a ambas por una constante, NO si se le suma una constante. En ese caso la figura se va a deformar (comparar la forma de la figura interior con respecto a la exterior);



Pensemos en una manguera de bombero. Cuando se empieza a enrollar es una elipse (pensemos en dos dimensiones), luego se le van agregando "tiras" del mismo ancho hasta que llega un punto que se tiene un círculo, y a partir de allí se sigue manteniendo el círculo. Lo mismo ocurriría con un rectángulo, llega un punto (en el límite) en que se hace cuadrado.

Para justificar estas respuestas en forma algebraica se puede tomar como ejemplo un rectángulo de lados a y b. Si se le suma una cantidad constante los lados pasarán a medir (a + m) y (b + m). Para que los lados sean proporcionales, la razón entre los lados se debe mantener constante. Sin embargo $b/a \neq (b+m)/(a+m)$.

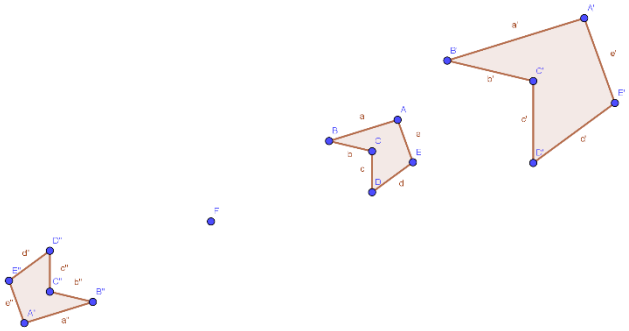
14. a. La homotecia de razón 1 es la identidad. Y si es -1 es una simetría central.
b. La imagen del centro O es el mismo centro O: O´= O.
c. Sí, son funciones biyectivas, a cada punto del plano le corresponde un único punto del mismo plano.
Los estudiantes se pueden preguntar: "¿Cómo puede establecerse una correspondencia biunívoca entre dos figuras que tienen distinta área?". Aparece aquí el concepto de infinito (infinitamente grande o infinitamente chico) bastante difícil de comprender para ellos. Se puede ejemplificar buscando una correspondencia entre el segmento [0,1] y los números reales y utilizando la propiedad de que entre dos números racionales hay un número racional (por lo tanto, infinitos), lo mismo para los

irracionales. Puede ayudar también pidiéndoles que se abstraigan del dibujo concreto, pensando que los puntos no tienen dimensión, no ocupan lugar.

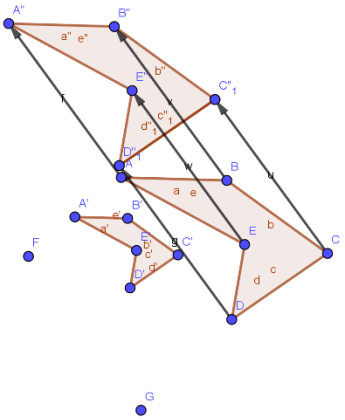
15. La homotecia de una semirrecta es una semirrecta que será de igual sentido si la razón k > 0 y sentido contrario si k < 0.

16. A´B´/ AB = |k|

17.

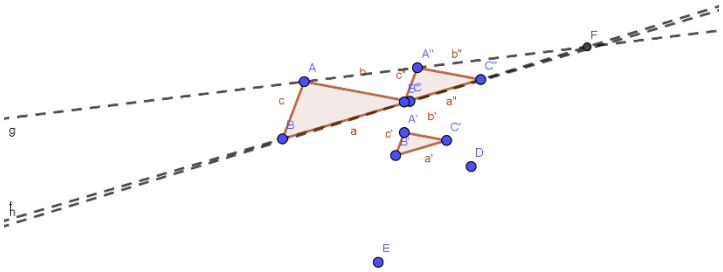


La composición de homotecias del mismo centro es una homotecia de igual centro cuya razón es el producto de las razones dadas.
En la figura se tiene:
$H_{(F,-0,5)}$ o $H_{(F,2)} = H_{(F,-1)}$



Si la composición de homotecias es de distinto centro y el producto de sus correspondientes razones es igual a 1, la figura resultante es una traslación.
En la figura se tiene:
$H_{(G,2)}$ o $H_{(F,\ 0,5)}$ = T_v

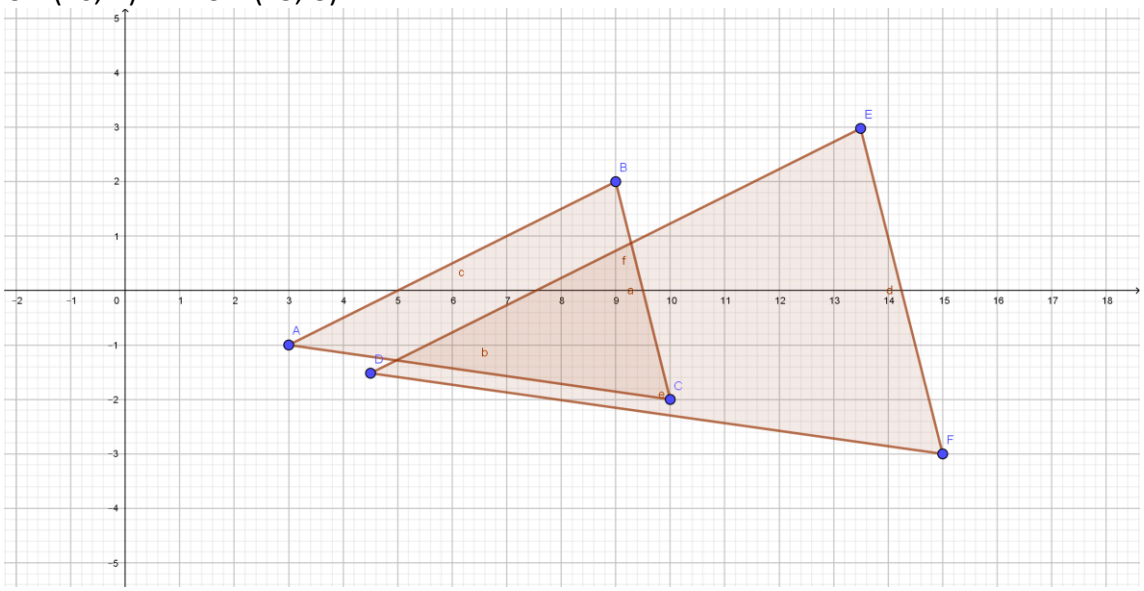
La composición de homotecias de distinto centro, en general, es una homotecia cuya razón es el producto de las razones dadas y su centro se puede hallar con la intersección de las rectas que unen los puntos homólogos.



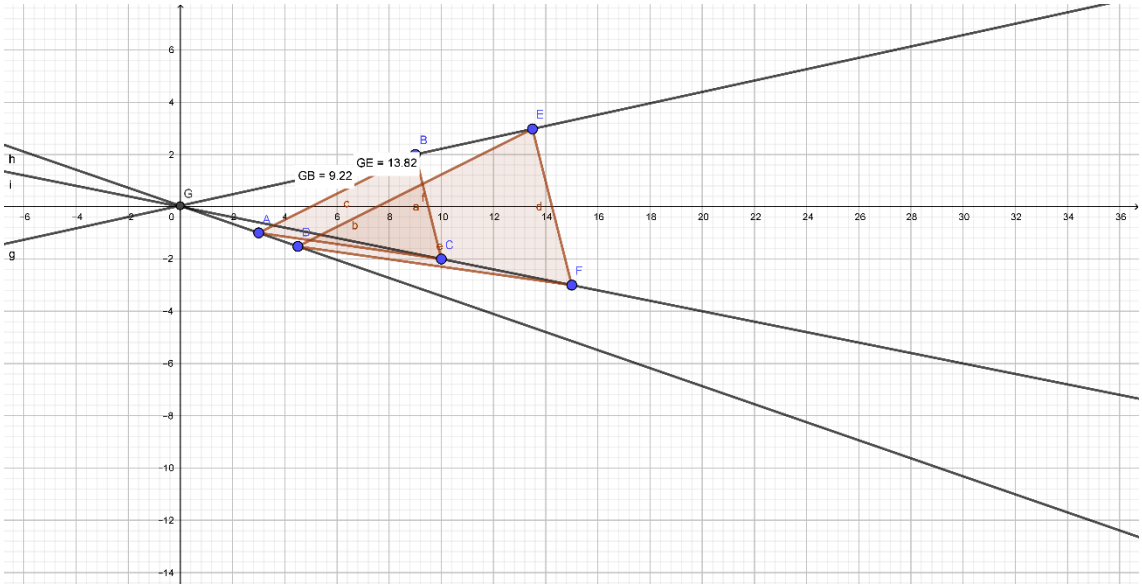
Por ejemplo, en la figura se tiene:
$H_{(E,1.5)}$ o $H_{(D,0.4)} = H_{(F,0.6)}$

18. Por construcción, utilizando la definición de homotecia
OA.k = OA' (siendo k la razón de homotecia)
OB.k = OB'
el ángulo O es compartido por ambos triángulos por lo tanto los triángulos OAB y OA'B' son semejantes por tener dos lados proporcionales y el ángulo comprendido congruente.
Por teorema de Thales los segmentos AB y A'B' resultan paralelos.
Con esto queda demostrado el paralelismo y la proporcionalidad.
Análogamente, repitiendo el mismo procedimiento con todos los segmentos de la figura, se comprueba que mantienen el paralelismo y, por consiguiente, también la congruencia de ángulos.
Si se toma un punto C entre A y B, su imagen C´ estará entre A´ y B´, con esto se puede comprobar que se mantienen alineados y en el mismo orden.

19.
a. x´= m . x
y´= m . y
b. k = 1,5 => x´= 1,5 x y´= 1,5 y
A = (3,-1) A´= (4.5,-1.5)
B = (9,2) B´= (13.5,3)
C = (10,-2) C´= (15,-3)



Se puede comprobar geométricamente la construcción obtenida en forma algebraica:
El centro de homotecia es G y tomando un par de puntos homólogos, se puede comprobar que: GE = 13,82 = 1,5 x 9,22 = 1,5 GB

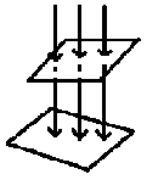


20. No se tienen que medir ángulos o lados. Los lados correspondientes resultan paralelos.

21. En caso de que la figura sea curvilínea, habría que transformar los infinitos puntos de su contorno, lo cual es imposible.
Lo que se hace habitualmente es buscar puntos significativos o que se resalten y luego unirlos en forma aproximada.

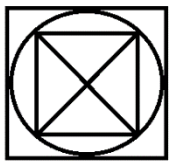
22. Se puede ver si se corresponden través de un movimiento (para que conserven la orientación) y luego, unir puntos homólogos, prolongar y tratar de encontrar un centro para ver si son homotéticos.
Si la figura es irregular, se puede comprobar con algunos puntos, pero eso no garantiza la semejanza. Lo que sí da lugar a una conjetura o a la verificación de que no lo son.

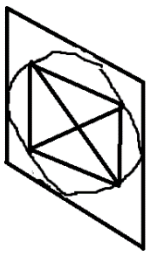
TRANSFORMACIONES AFINES (RAYOS PARALELOS – PLANOS NO NECESARIAMENTE PARALELOS)



En este caso, y pensando otra vez en la clasificación de las transformaciones que se hizo en el cuadro de la página 9, se consideran las sombras proyectadas a través de planos no necesariamente paralelos y con rayos paralelos, por ejemplo, los rayos del Sol a través de una ventana proyectando una imagen en el piso.
Nos vamos al plano:

Imaginemos el plano como una cuadrícula "inmensa", y pensemos en aplicar una transformación que cambia los cuadrados en rombos (no cuadrados). Esto se puede hacer, por ejemplo, dibujando una figura como la que se muestra en una tela de tul o de trama floja y se verá su transformación después de hacer el estiramiento en diagonal a la trama.





1. Realizar figuras geométricas en un sistema de ejes cartesianos ortogonales. Con los mismos datos representa las figuras, pero esta vez en un sistema de ejes oblicuos. Verificar las invariantes.

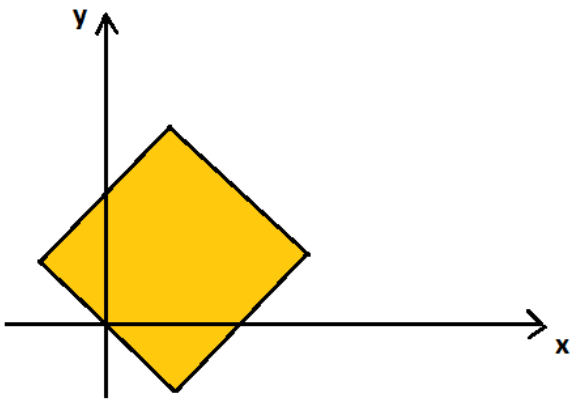
Imaginemos que se estira una tela elástica en la cual hay dibujada una figura; cambia la forma, pero siempre a rectas paralelas corresponden rectas paralelas. Para traducir esta experiencia en forma algebraica, si se estira la tela elástica con "fuerza 2" en dirección horizontal:
P---------→ P´
x´= 2x
y´= y
Si se estira la tela con "fuerza 3" en dirección vertical:
P--------→ P´
x´= x
y´= 3y
Si se estira en las dos direcciones se obtienen las ecuaciones generales de la afinidad:
x´= mx

y´= ny

2. ¿Qué ocurre con el área de una figura transformada en la geometría afín?
Dibujar un cuadrado con vértice en el origen de coordenadas y aplica la siguiente transformación afín de ecuaciones x´=3x ; y´=2y
Sacar conclusiones sobre el área.
¿Puede ocurrir que el área original y la transformada sean iguales? Conjeturar.

3. Comprobar la relación pitagórica luego de aplicarle una transformación afín (donde x´= 2x ; y´= y) a un triángulo rectángulo. Se puede recurrir al sistema de ejes cartesianos y hacer la demostración geométrica dibujando cuadrados en cada uno de sus lados.

4. Aplicar una transformación al cuadrado:
a. x´= 2x ; y´= y
b. x´=x ; y´= ½ y
c. x´= 3x ; y´= 2y
d. x´= 2x ; y´= 2y



e. ¿Cuáles son las condiciones para que una transformación afín sea una semejanza? ¿Y para que sea una simetría axial? Justificar.

5. Se tiene un cuadrilátero de vértices A(6,6) , B(2,10) , C(-2,6) y D(2,2) y se le aplica una transformación afín de ecuaciones: x´= 2x ; y´= ½ y.
a. Dibujar el cuadrilátero y su transformado en un sistema de ejes cartesianos.
b. ¿Qué se puede decir del área de ambos cuadriláteros? ¿Por qué?

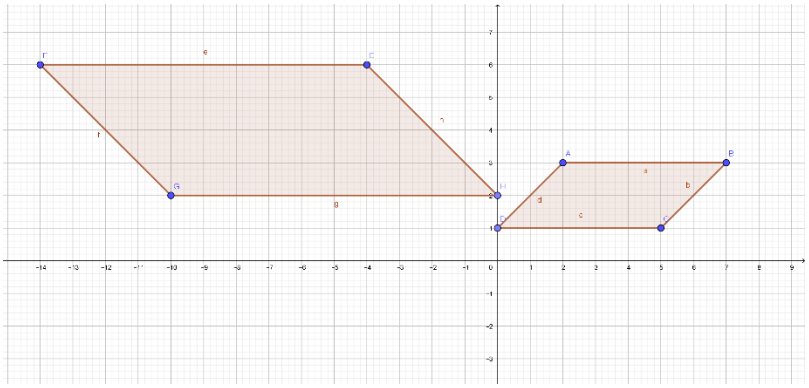
6. Dado el triángulo de vértices A(3,-6) , B(2,14) y C(-1,8) se lo transforma con una afinidad de ecuaciones x´= 2x ; y´= 1/3 y.
Si el área del triángulo ABC es 33 u^2, ¿cuál será el área del triángulo A´B´C´?

7. Comprobar (con un ejemplo) si la *simetría oblicua* es una transformación afín. (La simetría oblicua es aquella en que los segmentos que unen los puntos homólogos tienen una dirección dada y no requiere que sean perpendiculares al eje de simetría).

8. Qué transformación se debe realizar para transformar un cuadrado en un paralelogramo (no cuadrado)?

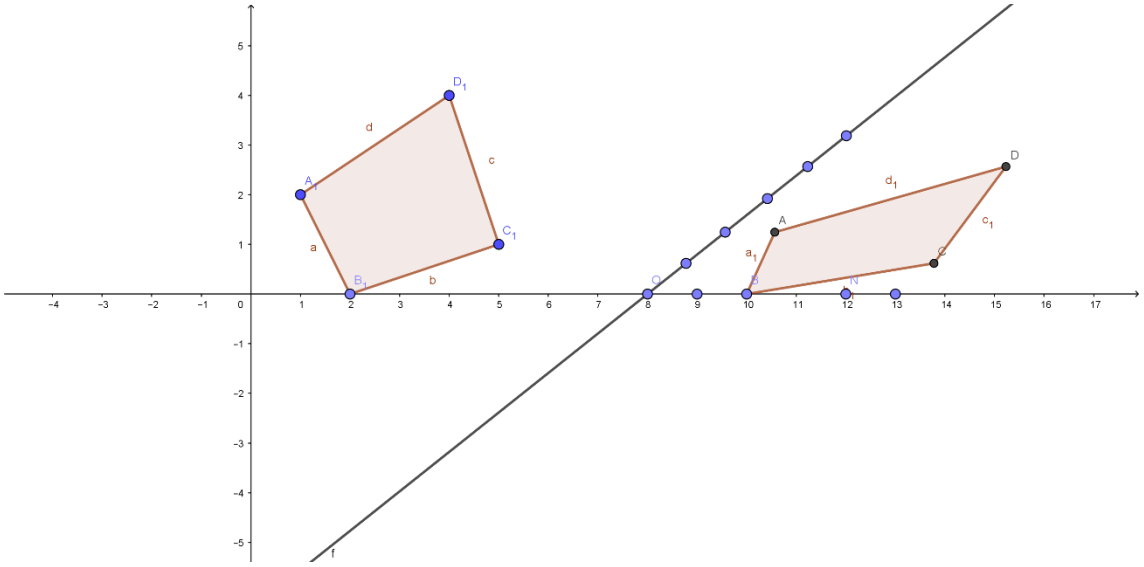
9. Aplicar la transformación x´= 2x ; y´= y a un cuadrado inscripto en un círculo. ¿En qué figura se transformó? ¿Qué sucede con sus áreas? ¿Y con sus áreas relativas?

10. Encontrar la transformación afín que transforma el paralelogramo ABCD en el paralelogramo EFGH.



POSIBLES SOLUCIONES Y COMENTARIOS

1.



Son invariantes de la transformación afín:

- alineación de puntos
- paralelismo de rectas
- la propiedad de ser punto medio de un segmento
- La relación de áreas correspondientes es constante.

Como consecuencia:

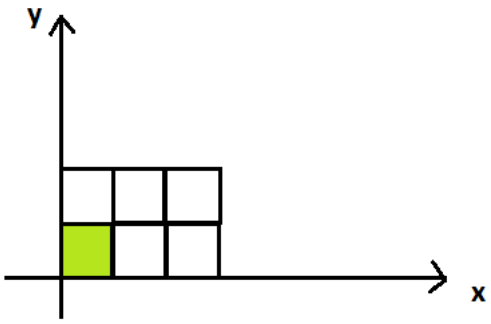
- Todo paralelogramo se transforma en un paralelogramo.
- Recíprocamente, dados dos paralelogramos hay (al menos) una aplicación afín que transforma uno en el otro.

No son conceptos afines:

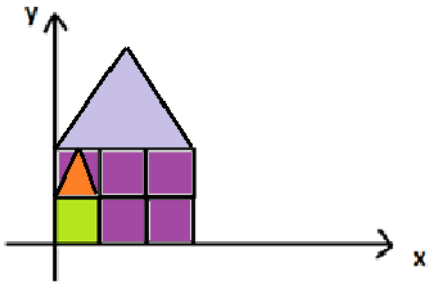
- la congruencia general de segmentos (aunque si dos segmentos congruentes son también paralelos, sus transformados son no solo paralelos, sino también congruentes)

- La congruencia general de ángulos
- El concepto de perpendicularidad
- Propiedad de la bisectriz de un ángulo

2.

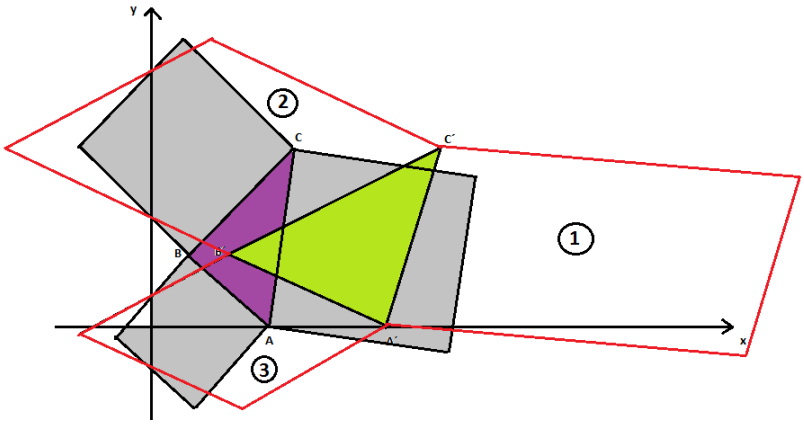


El área no se mantiene constante después de la transformación, pero sí se mantiene constante la relación entre áreas. Por ejemplo:



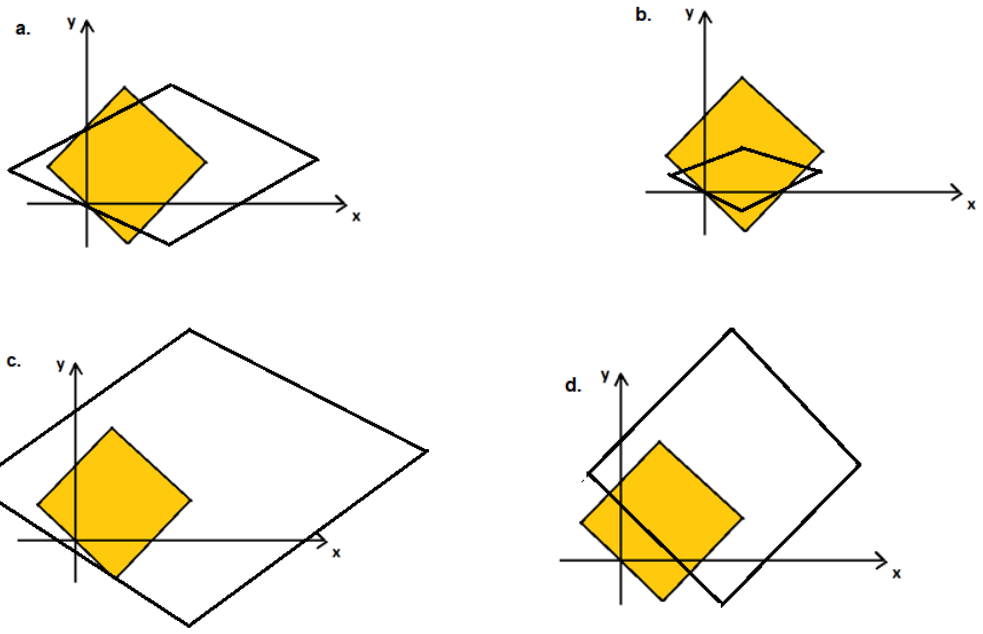
Se tiene originariamente un cuadrado y un triángulo. La relación de áreas entre estas dos figuras es la misma que la relación de áreas entre el rectángulo y triángulo transformados (utilizando la misma transformación anterior).
Se dice entonces que el área es una invariante afín relativa. O sea, al efectuar una transformación afín, las áreas quedan multiplicadas por el mismo factor, por tanto, la razón entre dos áreas es una invariante (absoluta).
Si las ecuaciones son $x' = mx$; $y' = ny$, para que las área (original y transformada) se mantengan iguales, m.n debe ser igual a 1, o sea que ambos deben valer 1 o debe m ser el inverso multiplicativo de n.

3. Dado que el área es una invariante afín relativa, no es de sorprenderse que la **relación pitagórica** se mantenga. Al triángulo rectángulo, al aplicarle una transformación afín, se transforma en un triángulo no rectángulo. Pero es fácil ver que, al hacer la demostración geométrica construyendo cuadrados sobre cada uno de sus lados, al cumplirse la propiedad de las áreas la figura original, también se mantendrá esa relación en la figura transformada (invariante relativa de las áreas).
Tomemos $x' = 2x$; $y' = y$



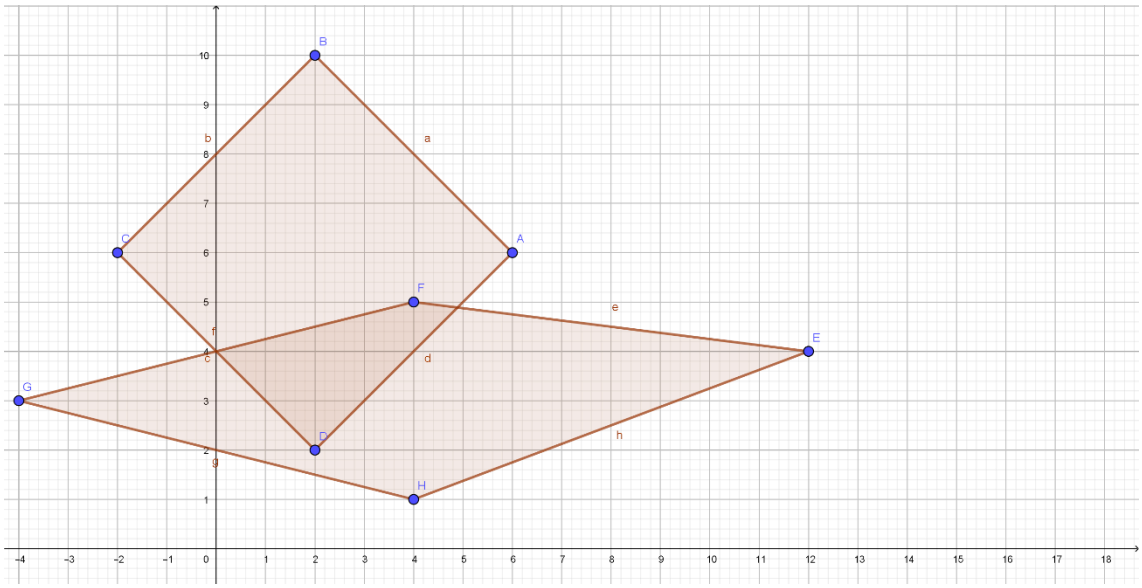
Si se colocara la figura pitagórica al sol (por ejemplo, apoyada en una ventana), se ve la sombra sobre el piso, pero no se reconoce más tal como es: el triángulo deja de ser rectángulo y los cuadrados no son más cuadrados, pero se sigue sosteniendo la relación pitagórica. En este caso las áreas se duplicaron y el área del paralelogramo 1 es igual a la suma de las áreas de los paralelogramos 2 y 3.

4.



e. Para que sea una semejanza debe ser |m| = |n|, y para que sea una simetría axial debe ser m = -n.

5. a.

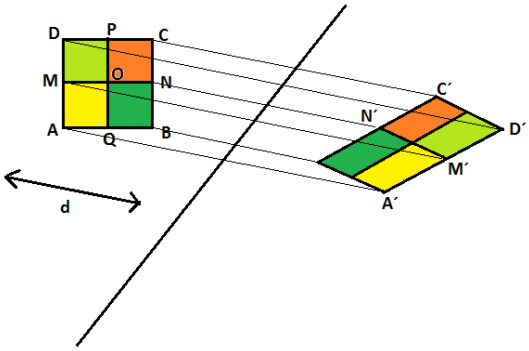


b. Las áreas son iguales porque m.n = 1

6. m. n = 2. 1/3 = 2/3

Entonces el área de A´B´C´= 33 u^2 . 2/3 = 22 u^2

7.



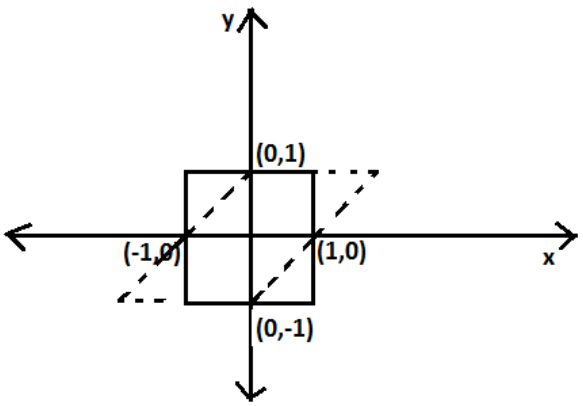
Hay que verificar que se cumplan las invariantes de la transformación afín:

- alineación de puntos (se cumple)
- paralelismo de rectas (se cumple)
- la propiedad de ser punto medio de un segmento (se cumple)

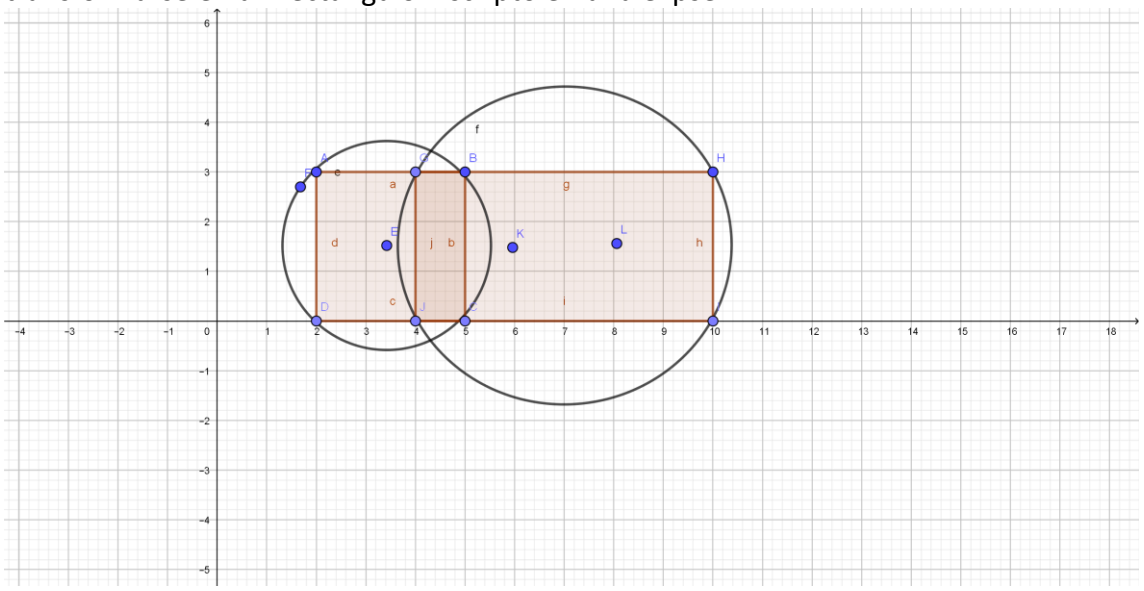
La relación de áreas correspondientes es constante (se cumple).

8.

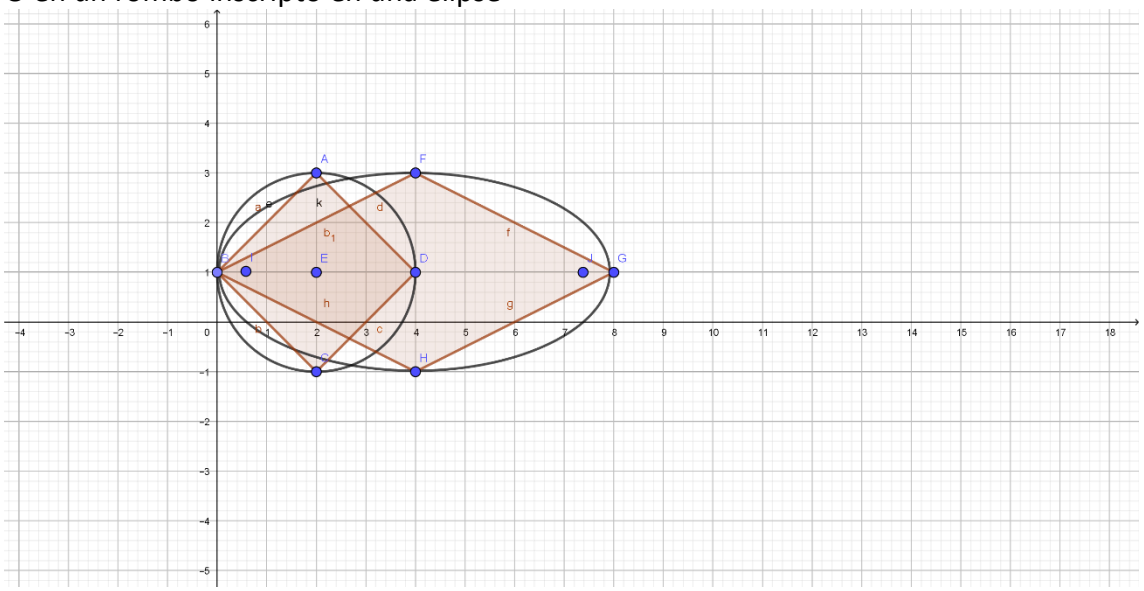
Por ejemplo: sea el cuadrado de vértices (+/-1 , +/- 1), la transformación x´= x + y y´= y, lo transforma en el paralelogramo de vértices (2,1), (0,-1), (-2,-1), (0,1).



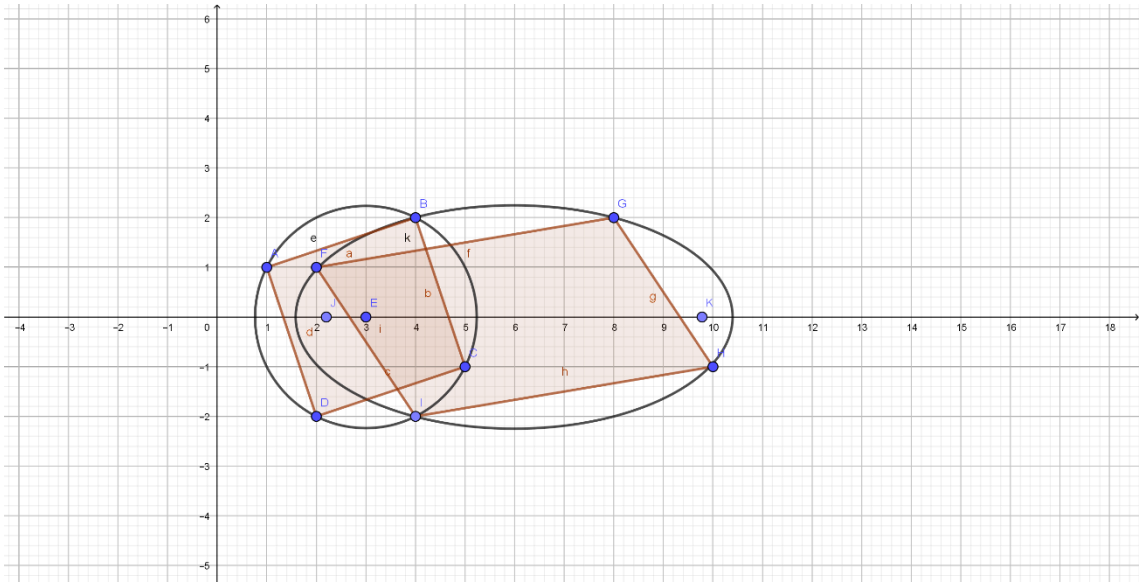
9. Todo depende de cómo este ubicado el cuadrado inscripto en el círculo, puede transformarse en un rectángulo inscripto en una elipse



O en un rombo inscripto en una elipse



O en un paralelogramo inscripto en una elipse



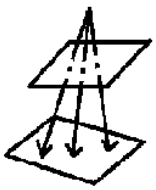
El área se duplicó y las áreas relativas permanecen iguales.

Área rombo (o rectángulo-paralelogramo)/área cuadrado = área de la elipse/área círculo

10.

$x' = -2x$; $y' = 2x$

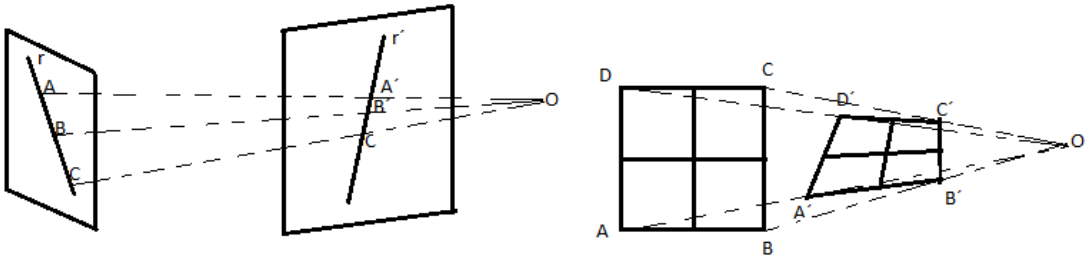
TRANSFORMACIÓN PROYECTIVAS (PLANOS NO PARALELOS - FOCO)



En este caso, consideramos la proyección de una figura con planos no paralelos iluminados por un foco.

Si contemplamos un cuadro o una "figura geométrica" sobre un plano desde distintos puntos, las imágenes en la retina son diferentes, pero no obstante reconocemos siempre la estructura geométrica del cuadro o figura, a pesar de que aparecen distorsionadas las magnitudes de segmentos y ángulos. Este reconocimiento o identificación es posible gracias a que existen propiedades geométricas invariantes respecto de las proyecciones.

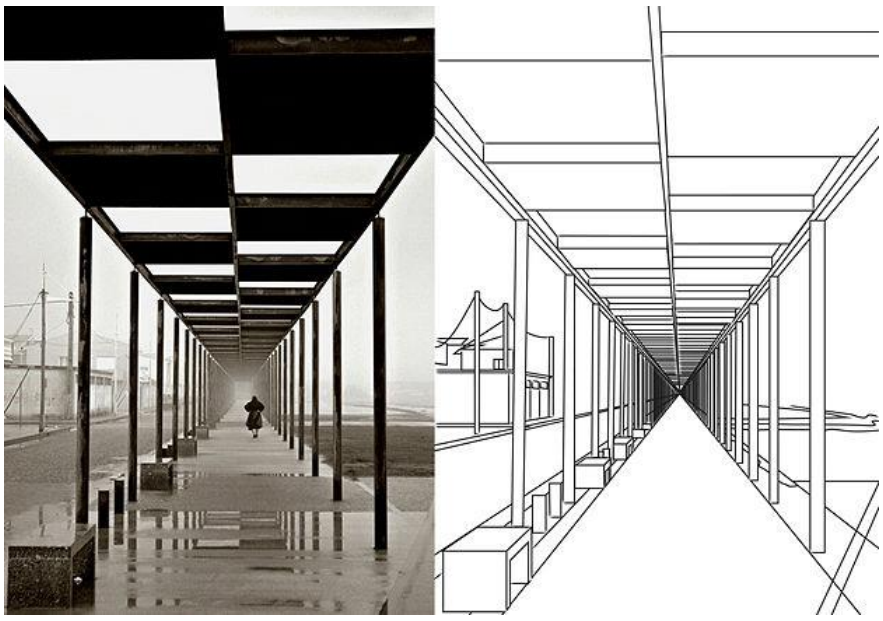
Recordemos ante todo que las operaciones fundamentales de la geometría proyectiva son las de proyectar desde un punto y cortar con un plano (en el espacio) o con una recta (en el plano) y que las transformaciones proyectivas o proyectividades resultan de componer o realizar sucesivamente esas operaciones fundamentales.



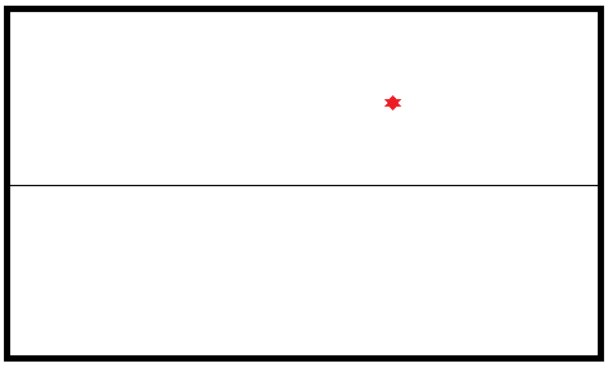
1. Observando las figuras, ¿cuáles serán que son la/s invariante/s de la transformación proyectiva?

2. ¿Cómo hacían los dibujantes para lograr el efecto de perspectiva?

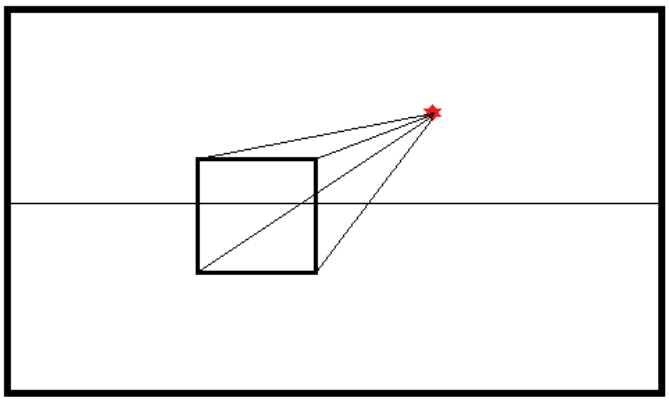
Cuando se dibuja, se tienen en cuenta los puntos de fuga y el horizonte. El horizonte siempre estará al nivel de los ojos del observador. Observa cómo en el bosquejo todas las líneas paralelas convergen en el mismo punto de fuga.



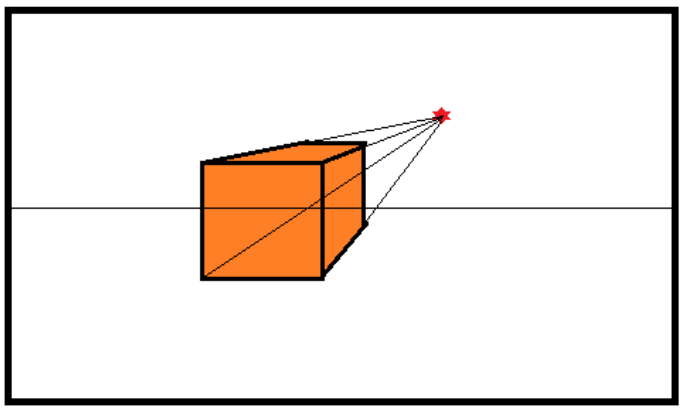
Vamos a hacer un ejemplo sencillo. Supongamos que queremos dibujar una caja en perspectiva. Se marca el horizonte y el punto de fuga:



Luego dibujamos la cara frontal de la caja y unimos cada vértice con el punto de fuga:



Trazamos paralelas a los lados de la cara y que intercepten en el mismo lugar a las líneas de fuga:



Probar con otros cuerpos geométricos (ayudarse con GeoGebra o Cabrí).

3. Dibujar un cuerpo geométrico en GeoGebra 3D. Determinar el punto de fuga y el horizonte.

4. Con la ayuda de un proyector o retroproyector, proyectar una figura sobre una pantalla. Luego anticipar cómo se vería esa figura si se gira la pantalla. Corroborar.

5. Ilusiones ópticas en 3D. Este dibujo extraordinario es de Julian Beever. Está hecho sobre el plano de la calle. ¿Desde dónde se debería mirar para lograr el efecto deseado? ¿Cómo es en realidad el dibujo?

Julian Beever es un artista inglés, residente en Bélgica, que se caracteriza por sus dibujos con tiza en las calles.
Utiliza la técnica de ilusión anamorfósica o anamorfosis, con algunas distorsiones especiales que cuando se ven desde un punto en particular, crean una impresión tridimensional.
Para ver sus obras pueden visitar su sitio en
http://www.julianbeever.net/index.php/phoca-gallery-3d
Otras obras del mismo autor:

POSIBLE SOLUCIONES Y COMENTARIOS

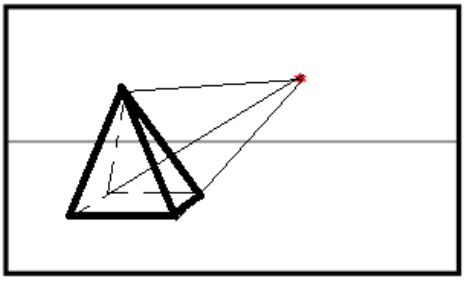
1. Como se podrá observar en las figuras, se pierde el paralelismo y el punto medio de un segmento, pero se sigue conservando la alineación.

Entonces solo es invariante:

- la alineación de puntos (propiedad proyectiva fundamental).

Una forma muy representativa para entender esta transformación es la de proyectar una imagen (ya sea con un proyector o un retroproyector) y torcer la pantalla (que no se encuentre paralela al plano de lo proyectado).

2.



3. Producción libre.

4. *Experimentar con proyector.*

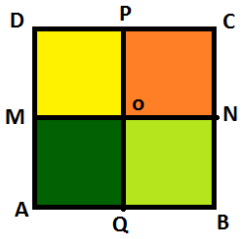
5.

El efecto se ve desde donde está la cámara en el trípode.

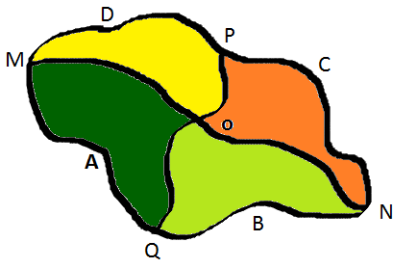
TRANSFORMACIONES TOPOLÓGICAS

Esta transformación, denominada también del caucho, no está considerada dentro del cuadro de la página 9, dado que no se puede deducir a partir de las sombras de un plano a otro.

Volvamos al cuadrado que hemos utilizado anteriormente para hacer transformaciones:



Supongamos que la figura está dibujada sobre un trozo de caucho. Vamos a aplicar una transformación más drástica. Si estiramos el caucho deformándolo de modo tal que no se produzcan rupturas ni superposiciones, obtenemos una transformación que se denomina **homeomorfismo o topológica**. No se trata aquí solo de estirar una tela elástica como se hacía en la afinidad, ahora se puede también curvarla.



En topología está permitido doblar, estirar, encoger, retorcer, etc. los objetos, pero siempre que se haga sin romper ni separar lo que estaba unido, ni pegar lo que estaba separado. Por ejemplo, un triángulo es topológicamente lo mismo que una circunferencia, ya que podemos transformar uno en otra de forma continua, sin romper ni pegar. Pero una circunferencia no es lo mismo que un segmento, ya que habría que partirla (o pegarla) por algún punto. Esta es la razón de que se la llame la «geometría del caucho», porque es como si estuviéramos estudiando geometría sobre un papel de goma que pudiera contraerse, estirarse, etc.

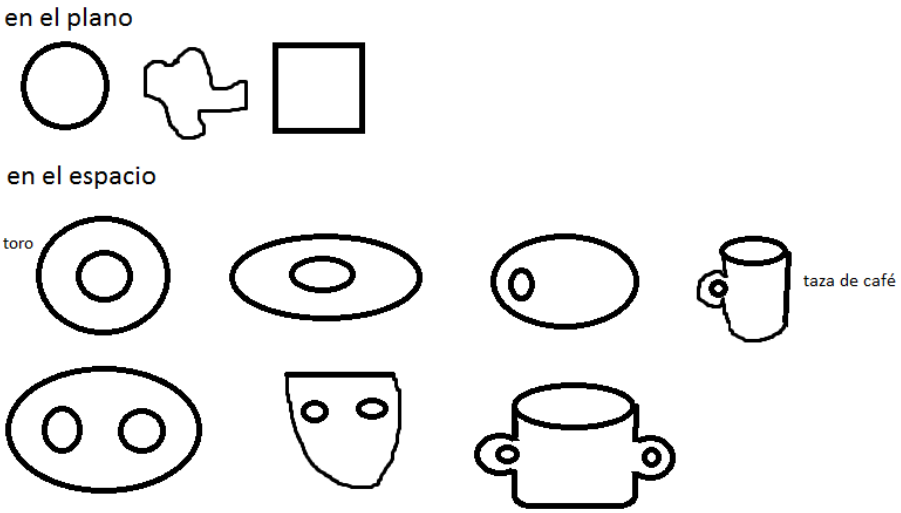
En el mundo que nos circunda estamos acostumbrados a encontrar superficies que tienen un “dentro” y un “afuera”, o por decirlo de otra manera, una parte interna y una externa. Así, por ejemplo, sobre una superficie esférica una hormiga que quiere ir de la parte externa a la interna (o viceversa) deberá agujerear la superficie.

Veamos lo que no se puede hacer en una transformación topológica. No se puede:

- superponer dos puntos que eran distintos
- producir una “laceración” (corte)

1.Respetando estas dos condiciones, ¿cuáles son sus invariantes?

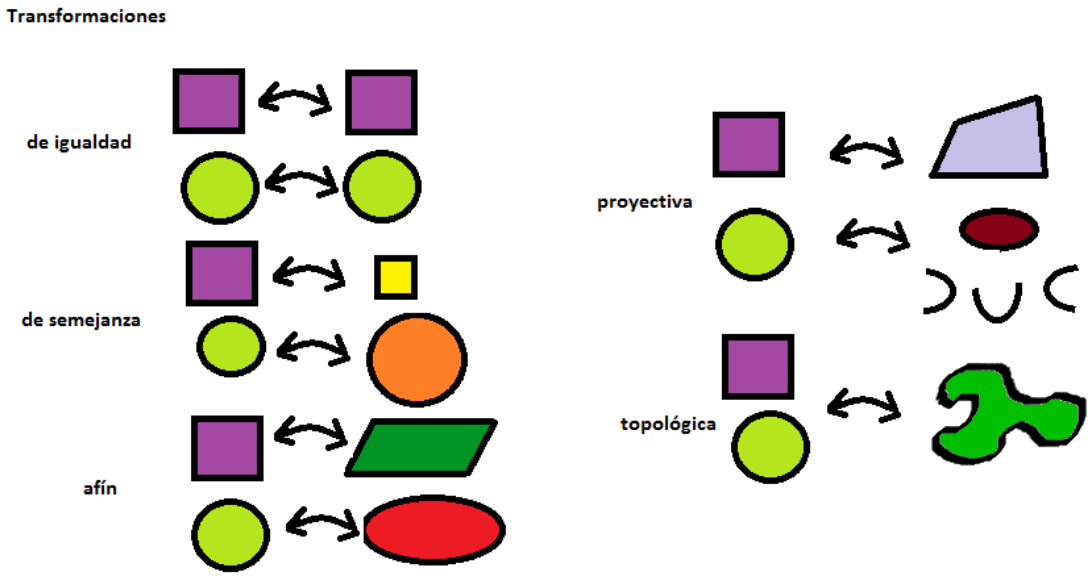
Algunas figuras parecen diferentes, pero topológicamente son equivalentes.
En el espacio, una esfera, un elipsoide, un poliedro son topológicamente equivalentes, pero no así un toro (cámara de auto). Este podría ser topológicamente equivalente a…una tacita de café con el mango perforado por ejemplo.
Figuras topológicamente equivalentes:



2. Dibujar pares de figuras o cuerpos que **no** sean topológicamente equivalentes.

Cuadro resumen de las transformaciones:

Resumen gráfico:

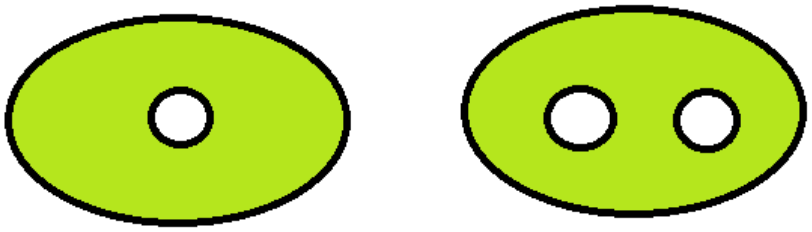


POSIBLES SOLUCIONES Y COMENTARIOS

1. Sus invariantes son:

- el número de agujeros no cambia.
- A punto interior corresponde punto interior en su transformado.

2. Por ejemplo:



RESUMIENDO:

1.Teniendo en cuenta las experiencias anteriores, anotar en forma ordenada y organizada qué propiedades se mantienen y cuáles no. Las propiedades que se mantienen se denominan INVARIANTES (por ejemplo, el paralelismo en la semejanza).

Si es necesario, recurrir otra vez al material concreto. Se puede organizar la información completando un cuadro general en donde aparezcan las invariantes de cada una de las transformaciones y los elementos que sí varían. Como ejemplo están las invariantes de la congruencia donde se conserva todo

.

Invariantes	Congruencia	Semejanza	Afín	Proyectiva	Topológica
- Distancia	sí				
- Ángulos	sí				
- Incidencia y alineación	sí				
- Orden	sí				
- Paralelismo	sí				
- Perpendicularidad	sí				
- Área	sí				
- Punto interior	sí				
	sí				

2. Comparar las invariantes al tomar a las transformaciones de a pares.

3. Expresar todas las transformaciones según estén incluidas unas en otras por sus invariantes. Este análisis se denomina Programa de Erlangen, sistematizado por el matemático alemán Félix Klein 1849-1925), y es otra forma de presentar la clasificación de las transformaciones geométricas.

POSIBLES SOLUCIONES Y COMENTARIOS

1.

Invariantes	Congruencia	Semejanza	Afín	Proyectiva	Topológica
-distancia	Sí	No	No	No	No
-ángulos	Sí	Sí	No	No	No
- Incidencia y alineación	Sí	Sí	Sí	Sí	
- Orden	Sí	Sí	Sí	Sí	
- Paralelismo	Sí	Sí	Sí	No	No
Perpendicularidad	Sí	Sí	No	No	No
- Área	Sí	No	No	No	No
- Punto interior	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí

Una vez analizadas las invariantes pueden entender entonces el cartel que dice "las flechas indican inclusión" (en el cuadro de la página 9) y por qué las transformaciones topológicas incluyen a todas las demás (¡casi todo varía!). Por ejemplo, la semejanza es un caso particular de la congruencia.

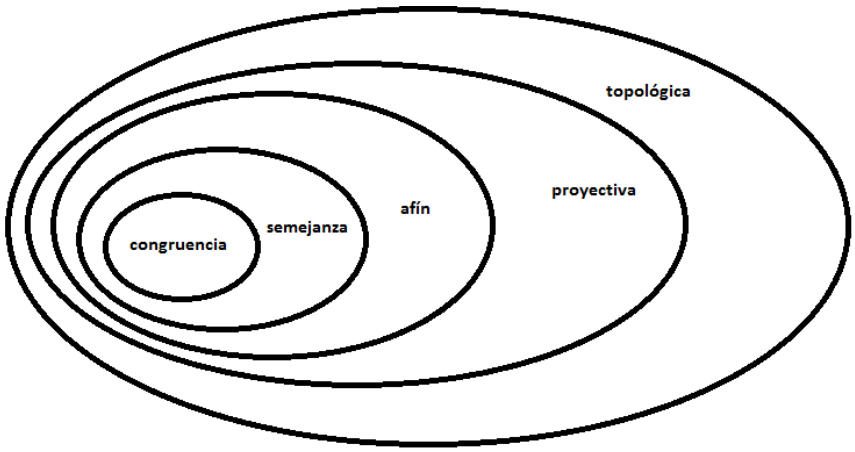
2. *A partir de los planos y de los focos de luz se pueden hacer otros tipos de análisis, como, por ejemplo:*

- *La congruencia es un caso particular de la afinidad, porque entre las innumerables posiciones relativas que pueden tener los planos para que sean oblicuos, en un momento pasarían a estar paralelos.*
- *La semejanza es un caso particular de la proyectiva (ídem al anterior).*
- *Pero también, si alejamos el foco de luz en la semejanza hasta que en el infinito se hacen paralelos, la congruencia sería un caso particular de semejanza.*
- *Ídem al anterior, entre la proyectiva y la afín.*

Como se verá en el cuadro, la inclusión se sigue sosteniendo al hacer este razonamiento.

3. *<u>Programa de Erlangen</u>*
Consideremos las siguientes denominaciones:
C: grupo de isometrías
S: transformaciones por semejanza
A: transformaciones afines
P: transformaciones proyectivas
T: transformaciones topológicas

Son grupos $T \supset P \supset A \supset S \supset C$
Topológico proyectivo afín métrico isométrico



Cada propiedad geométrica invariante con algunos de estos grupos lo es con respecto a las transformaciones de los grupos que le siguen en la inclusión, pero no necesariamente en las transformaciones de los grupos precedentes.
Por ejemplo, el paralelismo, invariante respecto de las transformaciones del grupo afín A, lo es también respecto de las transformaciones del grupo métrico S, pero no del grupo proyectivo P.

En estas consideraciones tan simples se basan las ideas desarrolladas por el matemático alemán Félix Klein (1849-1925) en su célebre publicación de 1872 conocida como el Programa de Erlangen.

Dice Klein que las propiedades de cada una de las clases señaladas pueden estudiarse ventajosamente en forma orgánica, constituyendo distintas geometrías:

Topología del plano: estudio de las propiedades topológicas

Geometría proyectiva: estudio de las propiedades proyectivas

Geometría afín: estudio de las propiedades afines

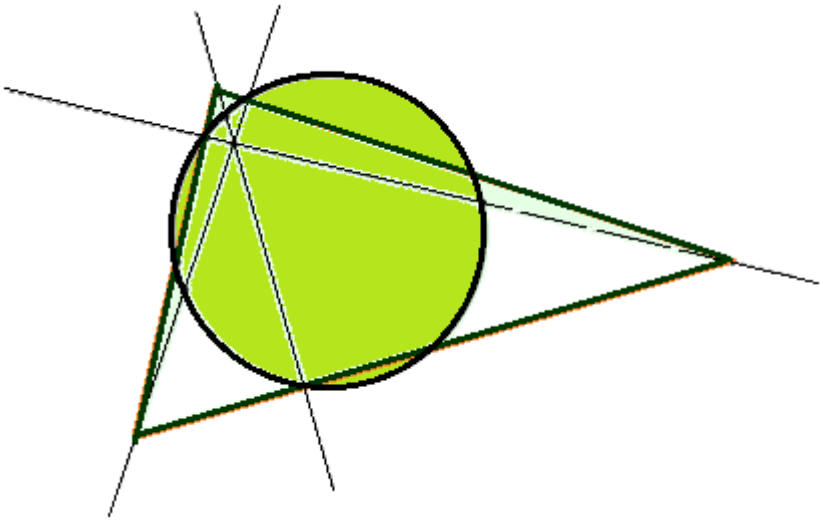
Geometría métrica: estudio de las propiedades métricas e isométricas

Las ideas del Programa de Erlangen dan también una sólida pauta para ordenar los temas en la exposición de una rama de la geometría. Desde el punto de vista didáctico, como en general la geometría métrica elemental se estudia antes que las geometrías proyectiva y afín, y conviene hacerlo así, en este nivel no se habla de distintas geometrías: la geometría es una sola, pero se la expone en un orden que asigna prioridad a las propiedades más básicas.

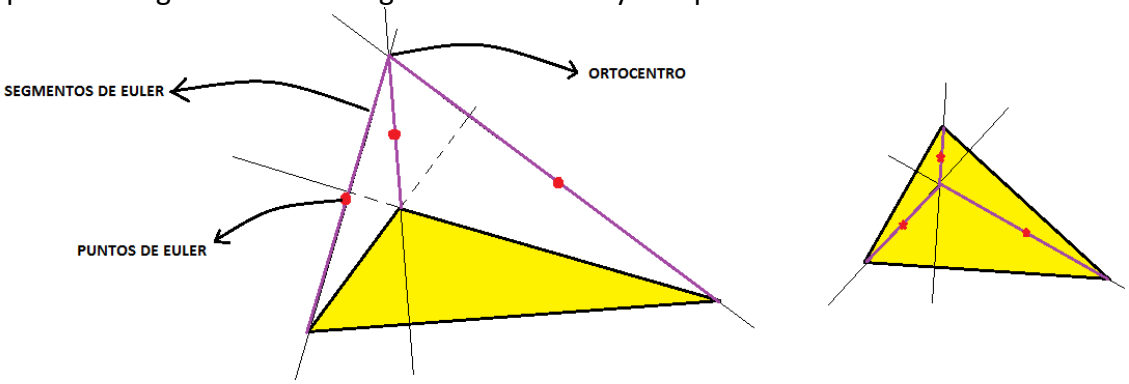
LA INVERSIÓN o EL INVERSOR DE PEAUCELIER (NO PROYECTIVA)

LA INVERSIÓN EN EL PLANO Y EL CÍRCULO DE EULER[2]

En 1765 el gran matemático suizo Leonhard Euler (1707-1783) demostró que: *"La circunferencia que pasa por los pies de las alturas de un triángulo es la misma circunferencia que pasa por los puntos medios de los lados de ese triángulo"*
(Recordar que tres puntos determinan una única circunferencia que pasa por ellos).

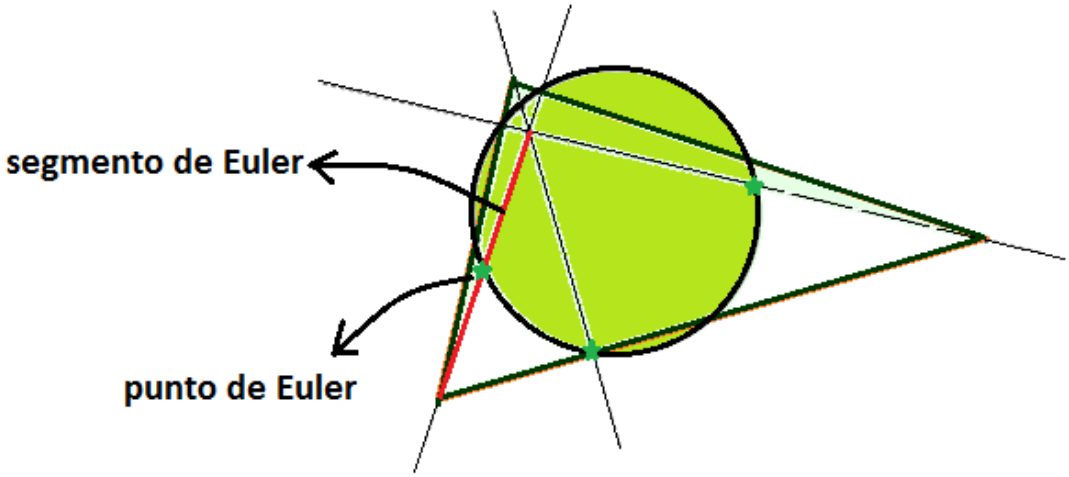


A partir de ahí surgieron otros elementos importantes que dieron lugar a otros descubrimientos, como lo es *el segmento de Euler* de un triángulo que une el ortocentro del triángulo (punto donde se intersecan las tres alturas del triángulo) con uno de sus vértices, y el *punto de Euler,* punto medio de un segmento de Euler. O sea que un triángulo tiene tres segmentos de Euler y tres puntos de Euler:



En 1820 los matemáticos franceses Charles Julien Brianchon (1783 - 1864) y
Jean Victor Poncelet (1788-1867) redescubrieron la circunferencia hallada por Euler y demostraron que dicha circunferencia también pasa por los puntos de Euler.

[2] En este apartado se contó con la colaboración en las discusiones con el Profesor Marcelo Ponce.

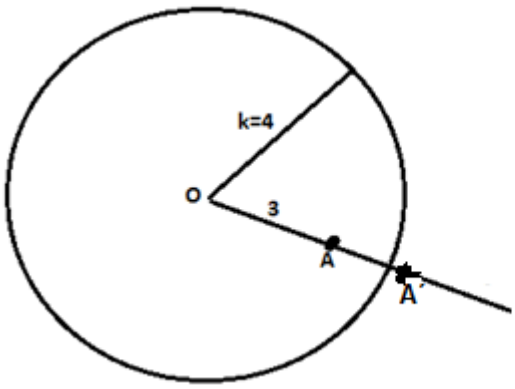


Esta circunferencia fue llamada por ellos **circunferencia de los nueve puntos o circunferencia de Euler.**
O sea que esta circunferencia pasa por 9 puntos. Tomando como referencia el triángulo donde se determinó el ortocentro, pasa por:

- **las tres bases de las alturas**
- **los tres puntos medios de los lados del triángulo**
- **los tres puntos de Euler.**

Aunque parezca mentira, existe una transformación que permite, entre otras cosas, obtener la circunferencia de Euler a partir de una figura geométrica.

Veamos la siguiente transformación:
Dada una circunferencia de centro **O** y radio **k**, a cada punto *A* del plano distinto de *O*, le asocia otro punto A´ de la semirrecta OA tal que se cumple la relación $OA \,.\, OA' = k^2$. Esta transformación se denomina **inversión de centro O y radio k**.[3] La figura siguiente es un ejemplo que muestra el inverso A´ de A (punto interior de la circunferencia) de centro O y radio k = 4:

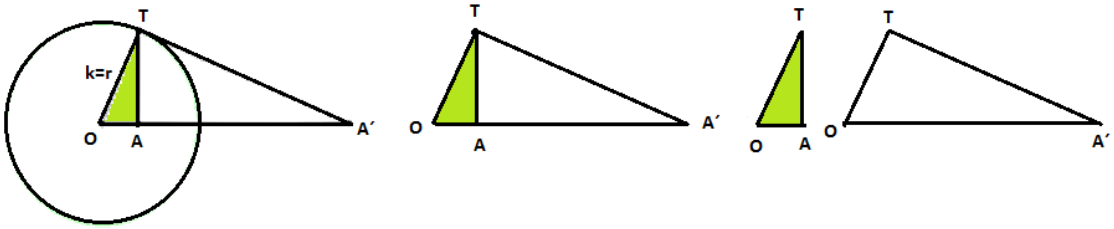


ÓA = 3
OA . OA´ = 16 => OA´= 16/3 = 5,33
AA´= 2,33

Una forma "cómoda" de construir geométricamente el punto inverso A´ del punto A (inversión) cuando éste es interior a la circunferencia es la siguiente:

[3] La inversión está estrechamente ligada a la Potencia P, recordemos que potencia de un punto P respecto a una circunferencia C, si trazamos una secante r a la circunferencia, es el producto de las distancias de dicho punto P a los de intersección A y A' de r con la circunferencia C. AP x A'P = Kp (= T2 = PB x PB')

Trazar la perpendicular de OA. Su intersección con la circunferencia determina el punto T. Por este punto trazamos una tangente que corta a la semirrecta OA. Ese punto de intersección es A´ (inverso de A). Vamos a ver por qué: los triángulos *OTA* y *OA´T* son semejantes porque tienen dos pares de ángulos congruentes: el ángulo recto ATT´ y OAT, y ambos triángulos comparten el ángulo TOA.

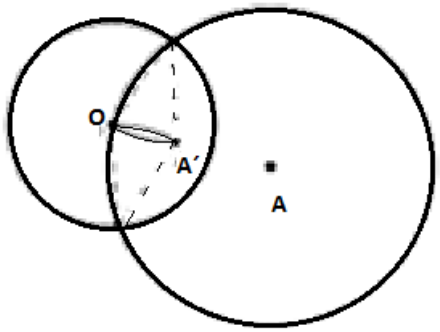


Entonces se demuestra que A´es el inverso de A ya que cumple con la definición porque:

$$\frac{OA}{OT} = \frac{OT}{OA'} = OA.OA' = k^2 = r^2$$

Para hallar la pre-imagen de A´ (si el punto A´ está fuera de la circunferencia), trazamos una tangente a la circunferencia desde A´, y siendo T como punto de tangencia, por T trazamos una perpendicular a la recta OA´ que cortará a ésta en el punto A, inverso del punto A´.

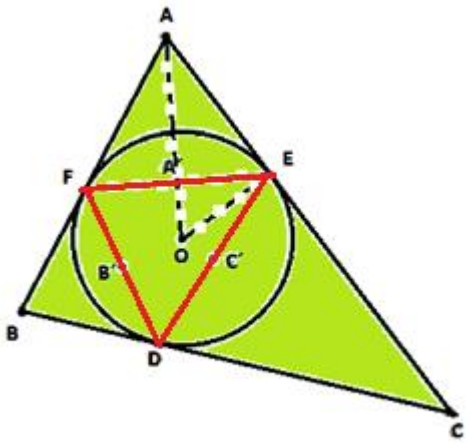
Otra forma de construir puntos inversos: si el punto A es exterior a la circunferencia trazamos una circunferencia con centro en A que pase por O (centro de inversión). Desde las intersecciones de las dos circunferencias, se trazan arcos que pasen por O. Su intersección será el punto transformado A´.
Como puede observarse un punto exterior de la circunferencia se transforma en un



punto interior de la misma y recíprocamente. Los puntos de la circunferencia de inversión se invierten en sí mismos (puntos dobles).

Con lo expuesto, ya estamos en condiciones de comenzar a dar respuesta a nuestra inquietud inicial: **Esta transformación, ¿nos permitirá obtener una circunferencia de Euler a partir de una figura geométrica?**

Construyamos un triángulo ABC y su circunferencia inscrita. Sean D, E y F los puntos de tangencia con los respectivos lados (siendo O el incentro de la circunferencia: punto de intersección de las bisectrices del triángulo ABC).



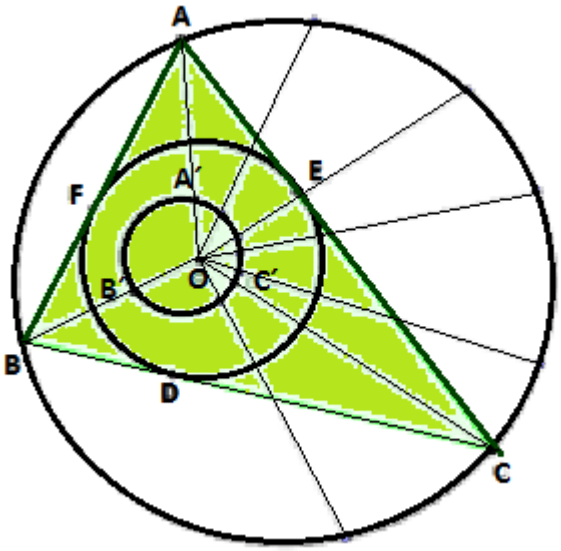
OE es el radio de la circunferencia inscripta a ABC. E y F son puntos de tangencia de las rectas tangentes a la circunferencia desde A (son las que incluyen los lados AB y AC del triángulo y son tangentes porque la circunferencia es inscripta). Ambos puntos son simétricos respecto de la bisectriz AO. Lo mismo ocurre con las tangentes por B y por C.

A´, B´ y C´ son los puntos medios de los segmentos EF, FD y DE.

El triángulo AEF es isósceles (los triángulos AFA´ y AEA´ son congruentes) y la perpendicular a EF por A pasa por el punto medio A´, es decir que el ángulo $\widehat{OA'E}$ es recto y también lo es el ángulo $\widehat{OEA}$. Los triángulos OEA y OA´E son semejantes.

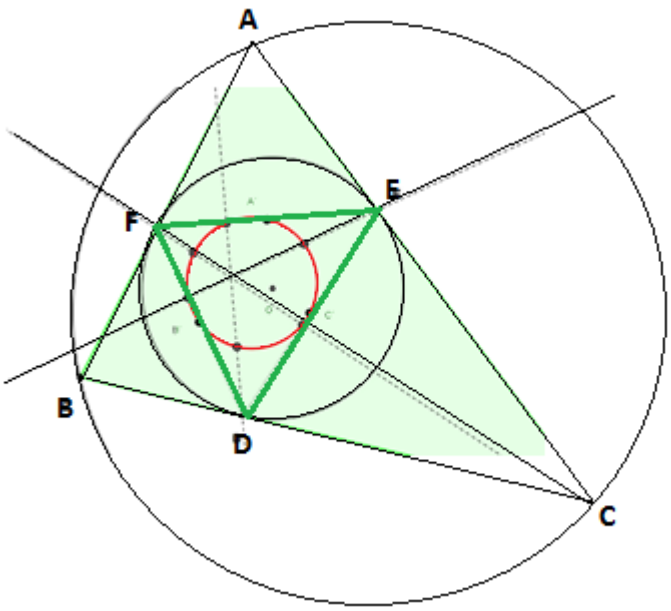
Entonces tenemos:

$\frac{OA'}{OE} = \frac{OE}{OA} = OA'.OA = OE^2 = r^2$, esto quiere decir que A y A´ son puntos inversos. De la misma manera se prueba que B y B´ y C y C´ también lo son.



Por todo lo expuesto la circunferencia que contiene a los vértices del triángulo ABC (circunscrita) se transforma en la circunferencia que pasa por A´, B´ y C´ (con respecto a la circunferencia inscrita).

Dicho de otra manera: *"La inversión respecto de la circunferencia inscripta transforma la circunferencia circunscrita al triángulo ABC en la circunferencia de los nueve puntos con respecto al triángulo DEF".*



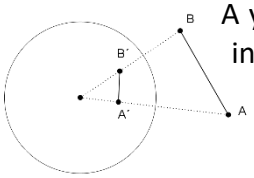
(Resuelto con GeoGebra).

1. Dibujar la circunferencia de Euler y distinguir todos los elementos que la caracterizan: segmentos de Euler, puntos de Euler, etc.

2. (Para trabajar con GeoGebra)
Para trabajar la inversión, esta transformación parte de un objeto a transformar con respecto a una circunferencia. Por lo tanto, se debe dibujar una circunferencia, determinar un objeto (que puede ser cualquier figura) y luego activar el botón de "inversión", señalando primero el objeto y luego la circunferencia.
Elegir como objeto un punto y ver cuál es su transformado según esté dentro, fuera o sobre la circunferencia. Sacar conclusiones.
a. Dibujar un polígono como objeto y aplicarle la inversión. Moverlo y sacar conclusiones.
b. Dibujar una circunferencia dentro de la circunferencia y aplicarle la inversión. Moverla y sacar conclusiones.
c. Aplicar la inversión a una figura cualquiera y comprobar en ella la definición de esta transformación.
d. Dibujar dos puntos cualesquiera (uno interior y otro exterior a la circunferencia y comprobar si son inversos.

Se pueden buscar más problemas en la página "Más ejercicios de inversión: ejercicios resueltos de inversión -984- Trazoide". Trazoide.com

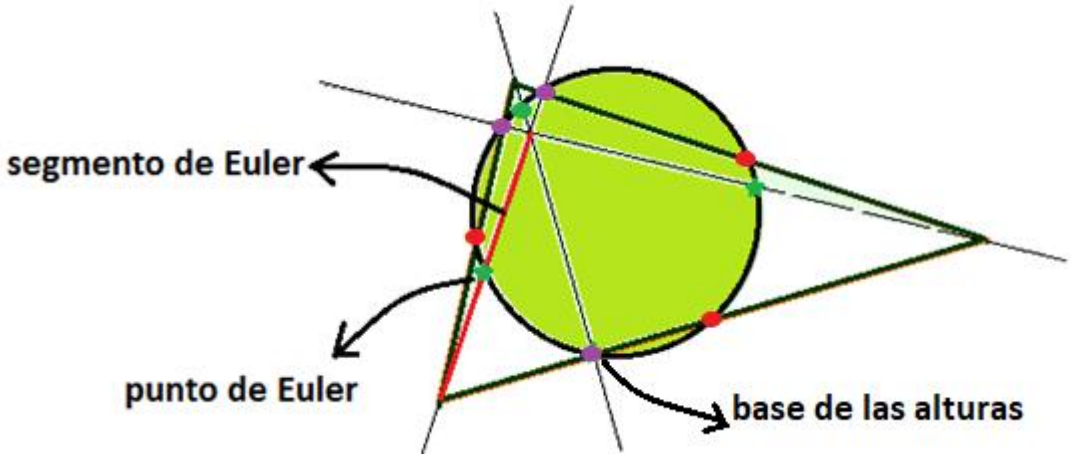
3. Verificar todas estas propiedades con el software. **¿Qué pasa con la inversión y**

… las distancias?	Si  A y B son puntos distintos y A´ y B´ los inversos respecto de la circunferencia, entonces $A'B' = \frac{AB.k^2}{OA.OB}$, esto significa que la

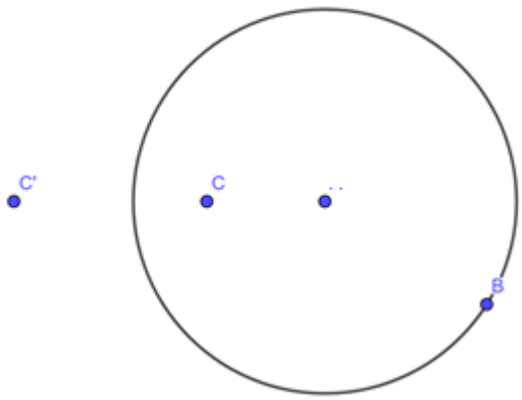
	longitud de A´B´ depende el segmento AB por una fracción (AB, K, OA y OB son constantes). Lo que prueba que las distancias no se conservan.
… las rectas?	- Toda recta que pasa por el centro de inversión "O" se transforma es si misma. - Las rectas que no pasan por "O", se transforman en circunferencias. - Las rectas paralelas se transforman en circunferencias tangentes. - Las rectas perpendiculares se transforman en circunferencias secantes que pasan por "O"
…las circunferencias?	- Una circunferencia exterior a la de inversión se transforma en una circunferencia interior a la de inversión. - Una circunferencia secante a la de inversión que no pase por "O", se transforma en una circunferencia. - Una circunferencia que pasa por "O", se transforma en una recta.
… los ángulos?	- La inversión conserva los ángulos.

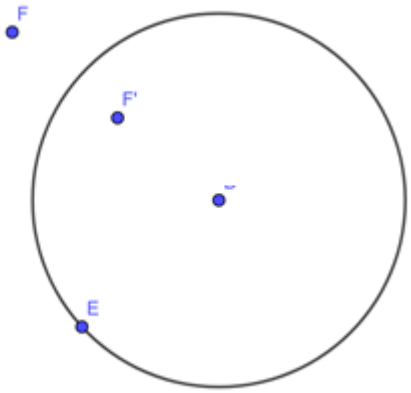
POSIBLES SOLUCIONES Y COMENTARIOS

1.



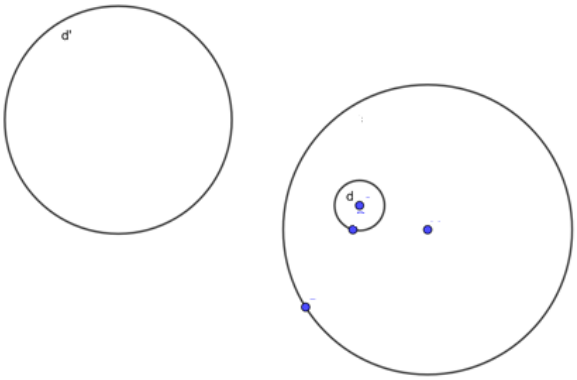
2. a.





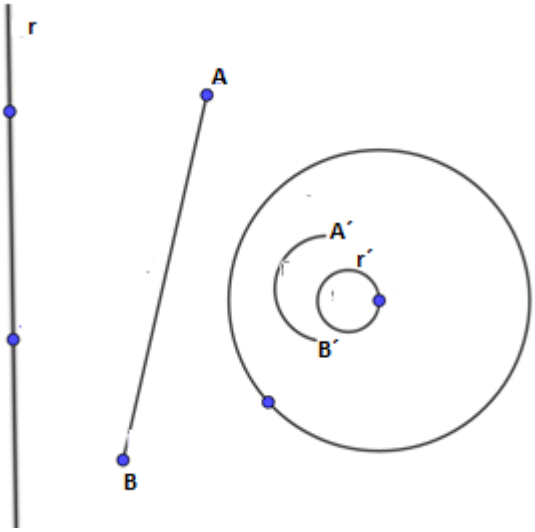
Si el punto es interior a la circunferencia (C), su transformado (C´) es exterior a la misma, y si el punto es exterior a la circunferencia (F), su transformado es interior a la misma (F´).

b.

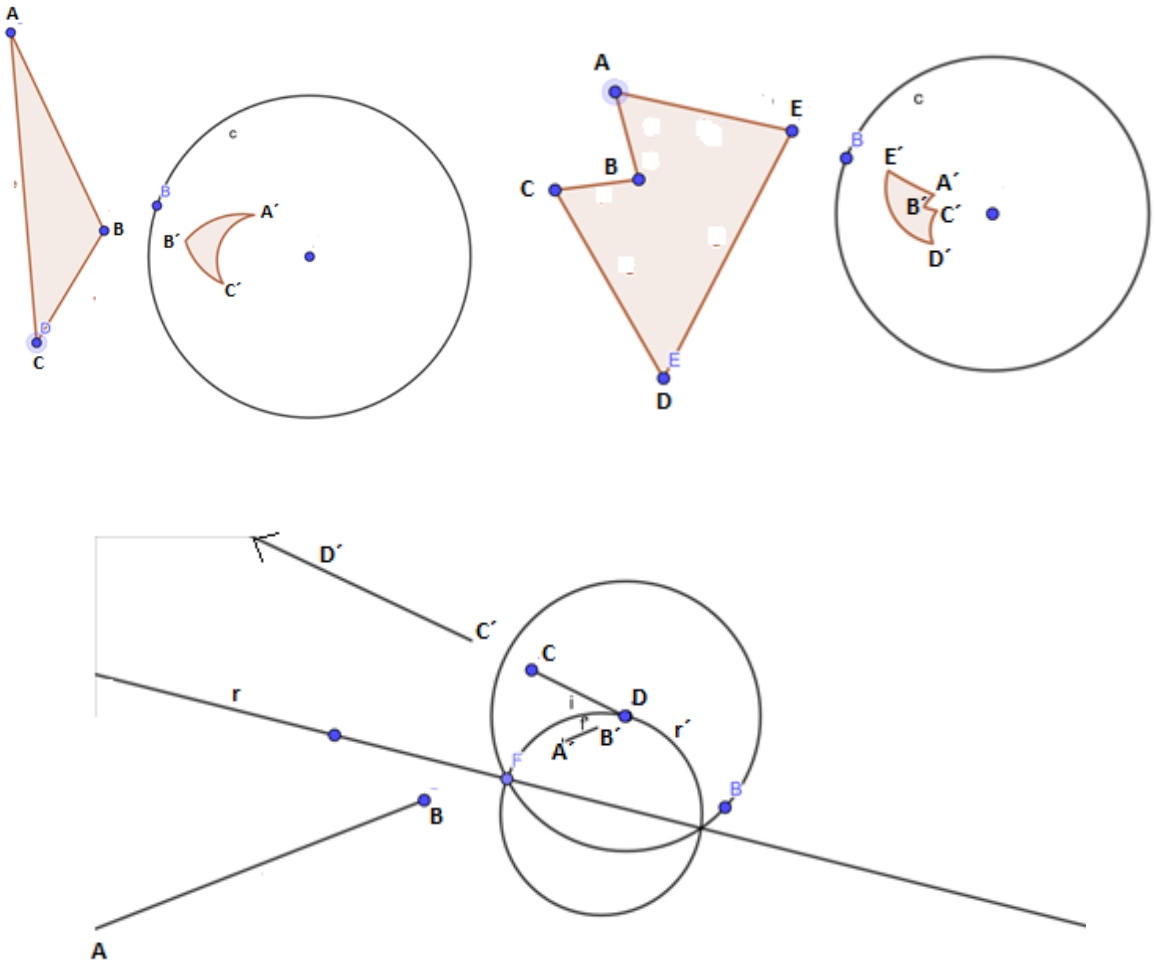


Si la circunferencia es interior a la circunferencia dada, la transformada es exterior, y viceversa.
Si la circunferencia se agranda, la transformada también se agranda, y viceversa.
Si son concéntricas, la transformada es concéntrica.

c.



Un segmento se transforma en un arco y una recta se transforma en una circunferencia.
Mover cada figura para ver los cambios que se producen en su transformada.



Estas son algunas de las observaciones:
Si una recta pasa por el centro de la circunferencia se transforma en sí misma.
Para que un segmento se transforme en un segmento tiene que ser colineal con el centro de la circunferencia.
Si una recta es tangente o secante a la circunferencia se transforma en una circunferencia que pasa por el punto de tangencia y el centro de la circunferencia, o por los puntos de intersección de la recta con la circunferencia y el centro de la misma.
Si uno de los extremos del segmento coincide con el centro de la circunferencia se transforma en una semirrecta.
Al realizar una inversión, si se borra la circunferencia se borran todos los elementos transformados, ya que estos dependen de la misma.

d. *Trabajar con el software, transformando uno de los puntos y verificando si coincide con el otro.*
3. Verificar con el software.
Esta transformación posee aplicabilidad en el dibujo técnico. Ver https://dibujotecni.com/geometria-plana/transformaciones-geometricas-inversion/

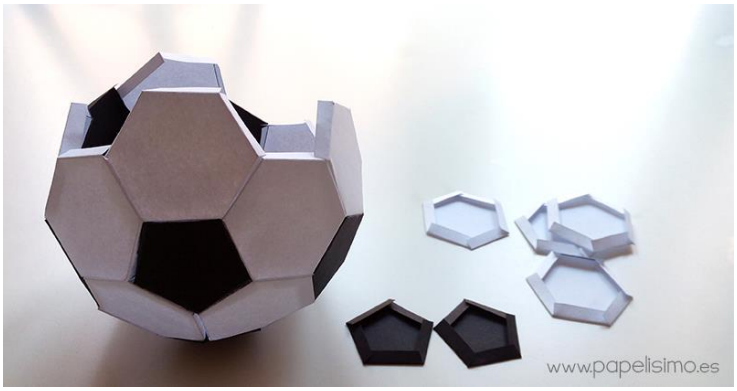
Propiedades de la inversión:
https://es.wikipedia.org/wiki/Inversi%C3%B3n_(geometr%C3%ADa)

ANEXO 1

¿QUÉ TRANSFORMACIONES NOS PERMITEN LLEVAR LA SUPERFICIE ESFÉRICA DEL GLOBO TERRÁQUEO A UN PLANO?

Empecemos con una situación sencilla y cotidiana: el fútbol.

1. Si nos preguntan qué cuerpo geométrico es una pelota de fútbol seguro que respondemos que es una esfera (¡pero no lo es!). La pelota de fútbol es un poliedro.

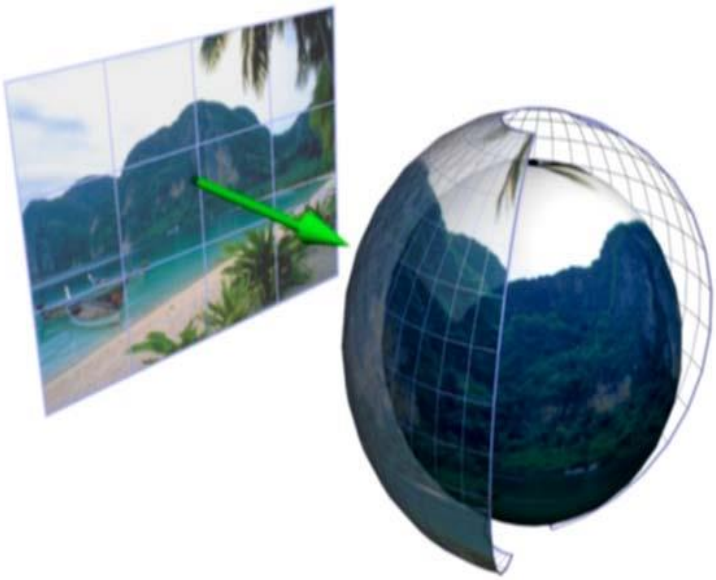


¿Qué forma tienen sus caras? Intenta cubrir una superficie plana con estas figuras. ¿Qué sucede? ¿Por qué?
¿Qué transformación les deberíamos hacer a estas figuras para que pudieran cubrir el plano?

2. Tomar un globo terráqueo y un mapa planisferio a la misma escala. Con un hilo medir y comparar entre las dos representaciones varias distancias que sean representativas (por ejemplo, la distancia entre los polos o entre dos ciudades importantes en distintos lugares.
¿Qué conclusiones puedes sacar?

3. Una forma de proyectar una parte de la superficie de una esfera sobre un plano es tomando una naranja, dibujar gajos sobre ella y cortarlos, plasmándolos sobre una mesa. ¿Qué se ve representado? ¿Se puede aplanar? ¿Qué sucede?

4. Observar la siguiente imagen:



Tomemos nuevamente el globo terráqueo y el planisferio:
¿Se puede envolver el globo terráqueo con el planisferio haciendo que coincidan todos los puntos correspondientes (meridianos con meridianos, paralelos con paralelos, etc.)? ¿Qué se tuvo que hacer con el planisferio para que cubra la superficie esférica?

5. El cilindro, el cono, el cubo o el dodecaedro son cuerpos geométricos que seguramente en algún momento de tu vida has construido en cartulina a partir de una red (desarrollo en el plano). ¿Ayuda esto a resolver nuestro problema del globo terráqueo?

¿Qué sucede si a la superficie de un globo terráqueo la transformamos en un plano?
Si no queremos que nos queden espacios vacíos, la tenemos que "estirar", con lo cual se deformaría y no sería representativa de la realidad***. ¡Y aquí es donde queremos llegar!***

Hay varias técnicas para hacer esta transformación. La idea es analizarlas con los estudiantes y ver si son óptimas, si tienen defectos, si alguna es más conveniente que otra.

La Tierra tiene forma de esfera (desatendiendo los pequeños achatamientos en los polos), superficie que no puede desarrollarse sobre un plano sin "forzar" alguna de sus partes, por lo que cualquier proyección de la superficie terrestre es una aproximación a la realidad.
A lo largo de la historia, el hombre ha sentido la necesidad de representar, en forma segura, la superficie terrestre y los objetos situados sobre ella en un plano. El objetivo de los primeros mapas era servir de apoyo a la navegación, indicaban los rumbos

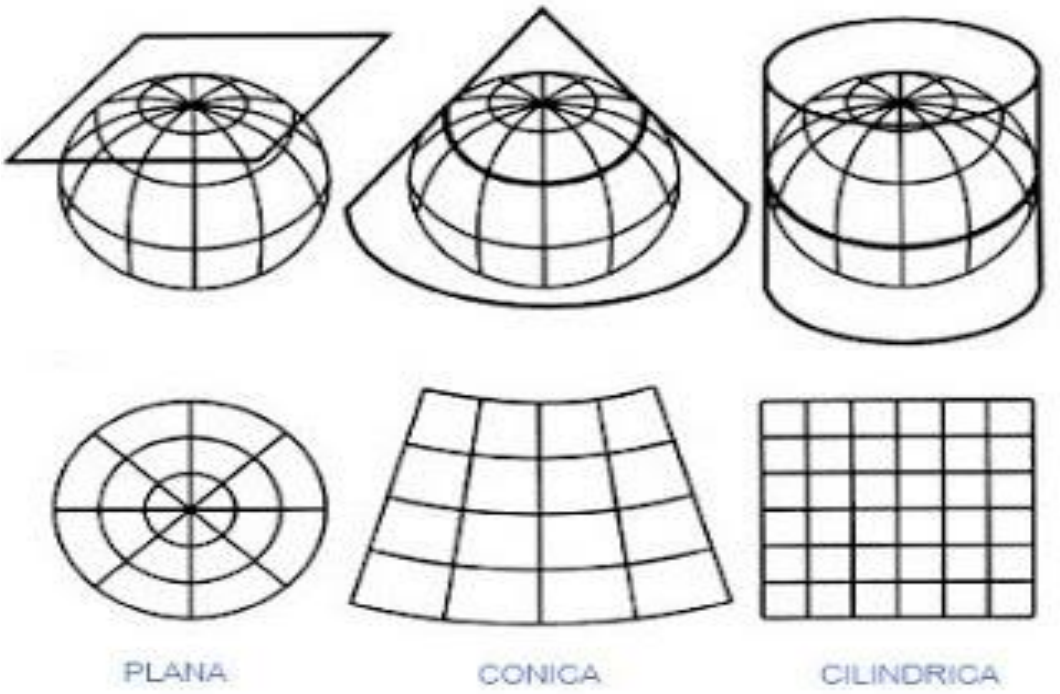
(direcciones) que era necesario seguir para ir de un puerto a otro, y las distancias entre ellos. Esto permitía las relaciones y el comercio entre otros países distantes.

Hoy en día el GPS (Sistemas de Posicionamiento Global) mantienen un esquema similar, aunque ha revolucionado los sistemas de navegación. Pero, en el siglo XVII, cartógrafos como Mercator demostraron que un sistema de proyección geométrico, junto con un sistema de localización basado en coordenadas cartesianas, es decir basadas en un par de ejes ortonormales (x e y), formando una cuadrícula, mejoraba la fiabilidad de distancias, áreas o ángulos medidos sobre los mapas.

Proyecciones cartográficas

Son proyecciones geográficas y en ella se establecen los puntos de relación entre una esfera y el plano. Por esta razón para poder mostrar la superficie de la Tierra en un plano necesitamos de una proyección.

Las proyecciones cartográficas se pueden clasificar según el tipo de plano auxiliar que se utilice para proyectar la superficie del globo terrestre. Así, la proyección puede ser **plana (acimutal), cónica o cilíndrica**.



Cada uno de estos tres tipos de proyecciones (acimutal, cónica y cilíndrica,) tienen asociado un tipo de grilla de coordenadas geográficas, como muestra la figura anterior.

La proyección cilíndrica, proyecta la superficie terrestre sobre un cilindro tangente a la misma.

Los paralelos y los meridianos se cortan en ángulos de 90°.

La línea de tangencia entre el plano (superficie del cilindro que después se desplegará) y la esfera es la de menor deformación.

Si esta línea se corresponde con el Ecuador, los polos resultan severamente dañados.

Como este tipo de proyección se distorsiona a medida que se acerca a los polos, se suele usar para las zonas intertropicales comprendidas entre los 40°N y 40°S del Ecuador (o sea cerca del Ecuador).

La mayor ventaja es que se trata de una proyección fácil de construir.
Se alteran ángulos y áreas.

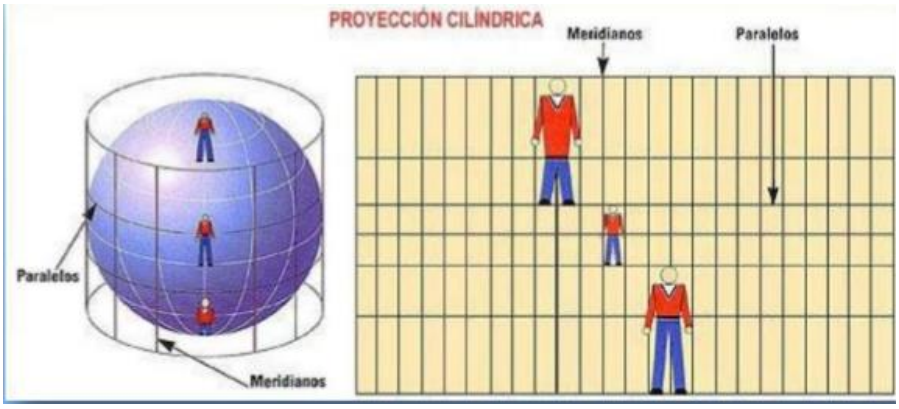
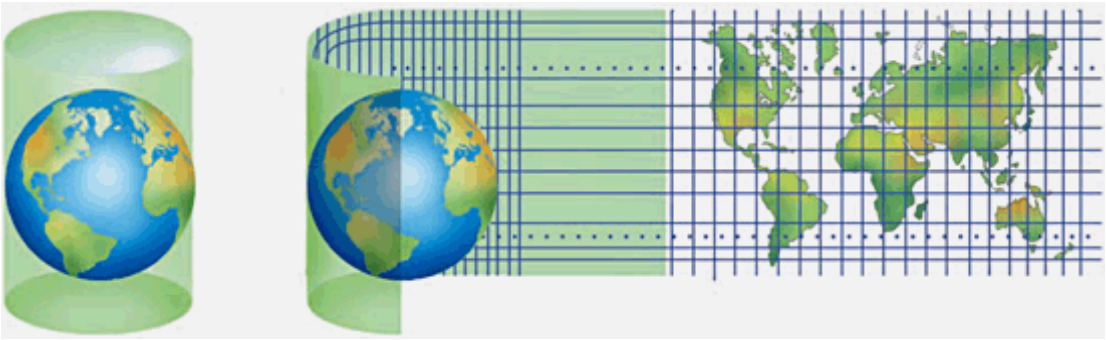


Fig. 1



La proyección cónica se proyecta la superficie de la Tierra sobre un cono. La línea de tangencia es un paralelo de menor o mayor latitud.
En la proyección cónica el vértice del cono se ubica en el eje que une los dos polos. Los meridianos tienden a converger hacia la "punta" del cono y a separarse hacia el sentido opuesto.
La línea de tangencia entre el plano y la esfera es la zona menos afectada por las distorsiones de la proyección. Hacia la parte superior de la línea de tangencia la distorsión tiende a comprimir la imagen, y hacia la parte inferior, a expandirla.

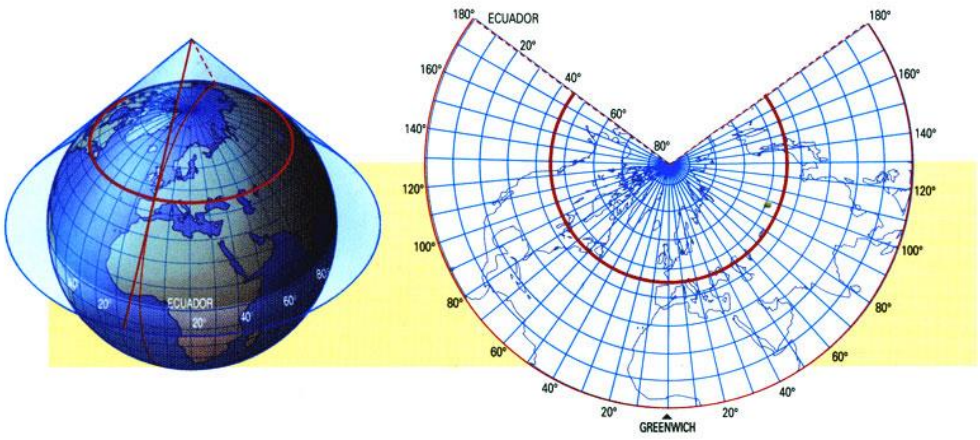
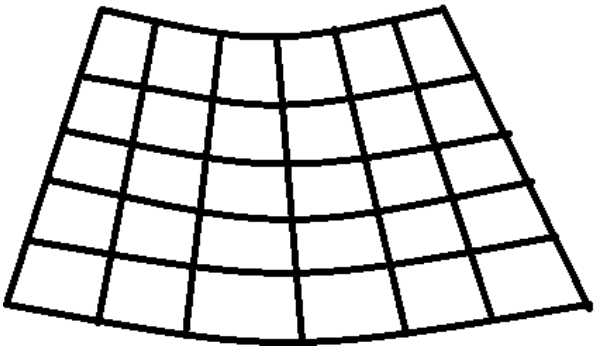


Fig. 2

6. Tomando como ejemplo la figura 2, representar una figura humana en distintos lugares de la grilla cónica:



En **la proyección acimutal o plana,** la tierra se proyecta en un plano tangente en un punto cualquiera de la superficie.
Los paralelos forman segmentos de círculos concéntricos y los meridianos tienden a converger, por lo que la distancia entre ellos disminuye progresivamente.
El punto de tangencia entre el plano y la esfera es el de menor deformación.
En el plano queda proyectado un círculo. El borde de ese círculo es la zona más deformada por esta proyección.

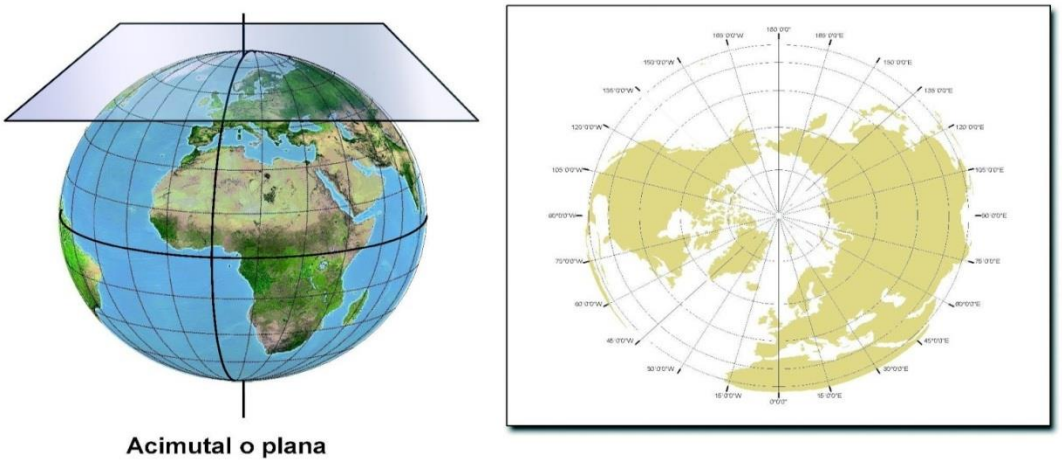
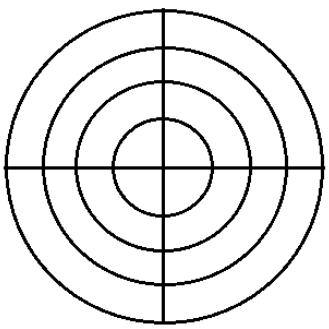
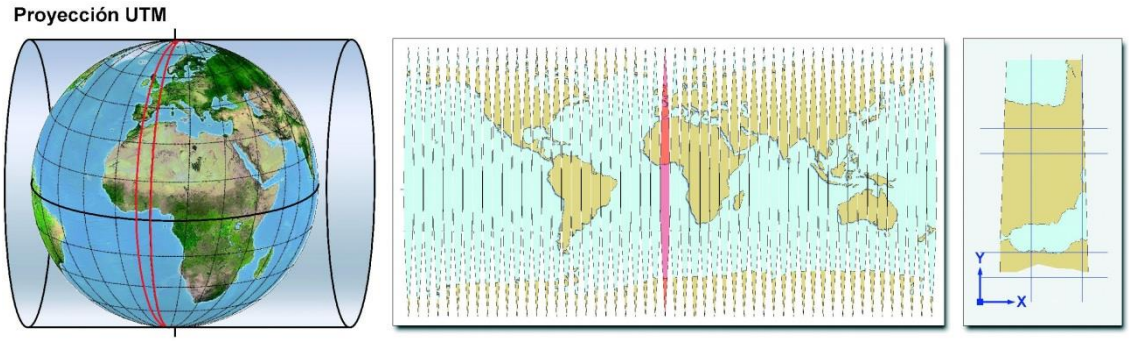


Fig. 3

7. Tomando como ejemplo la figura 3, representar una figura humana en distintos lugares de la grilla acimutal:



En la **proyección transversal** el eje de la superficie desarrollable y el de la tierra forman un ángulo de 90°. En este caso, si la proyección se hace sobre un cilindro, la línea de tangencia corresponde a un meridiano.



8. Completa el siguiente cuadro:

Proyección	Cómo resultan los paralelos y meridianos	Dónde se deforma
Cilíndrica		
Acimutal		
Cónica		

9. Responde las siguientes preguntas argumentando tu elección:

a) ¿Cuál crees que es la proyección más utilizada? ¿Qué ventajas e inconvenientes tiene?

b) Si estás ubicado cerca del polo Norte, ¿qué proyección de mapa sería el más acorde a utilizar? ¿Por qué?

Asimismo, podemos clasificar a las proyecciones cartográficas según las propiedades geométricas. Todas las proyecciones suponen una distorsión, pero según el tipo de propiedades que conservan y que distorsionan las proyecciones se clasifican en:

- proyecciones **equidistantes**, si conserva las distancias.
- proyecciones **equivalentes**, si conservan las superficies.
- proyecciones **conformes**, si conservan las formas (o, lo que es lo mismo, los ángulos).

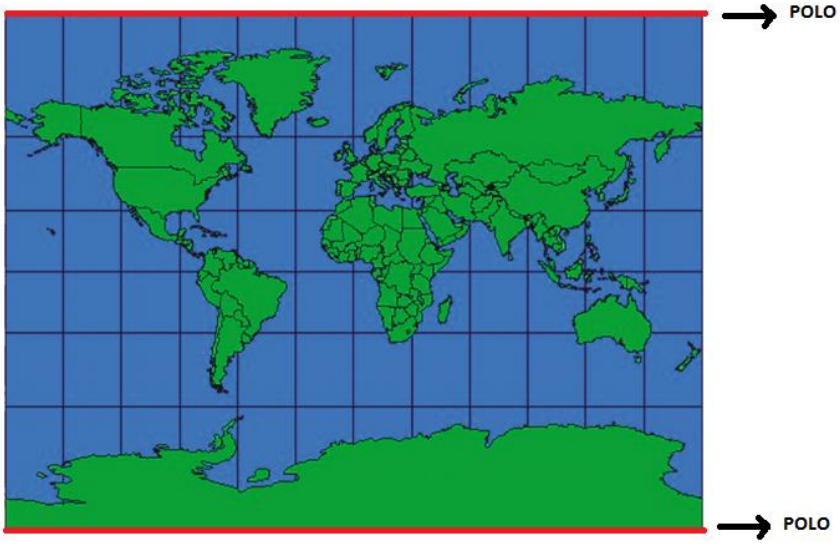
No es posible tener las tres propiedades anteriores a la vez, por lo que es necesario optar por la solución óptima que dependerá de la utilidad a la que sea destinado el mapa.

A modo ilustrativo, vamos a ver algunas de ellas.

La **proyección sinusoidal** es equivalente o equiareal. Conserva las superficies, pero distorsiona las formas geográficas. La franja intertropical y la zona del meridiano central (en la imagen es el meridiano de Greenwich, pero puede variar) son las partes menos afectadas por las distorsiones.

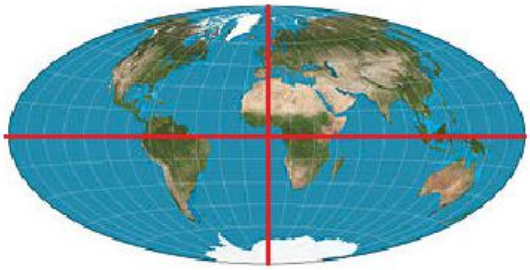
Loa paralelos se mantienen rectos. Están regularmente espaciados lo que brinda una representación precisa de las relaciones latitudinales.
Los meridianos son curvas senoidales, espaciadas a intervalos regulares a lo largo de los paralelos. La convergencia de los meridianos en los polos preserva la escala este-oeste a lo largo de los paralelos.

La **proyección cilíndrica directa** es una proyección conforme. Dado que conserva los ángulos es posible trazar líneas loxodrómicas de rumbo constante. La proyección cilíndrica más conocida y utilizada es la llamada proyección de Mercator.
Las formas geográficas sufren severas distorsiones en las zonas alejadas al eje de tangencia. En esta imagen, las zonas de altas latitudes tienen sus formas expandidas.
Los polos, que en la esfera son un punto, en la proyección cilíndrica se transforman en una recta.

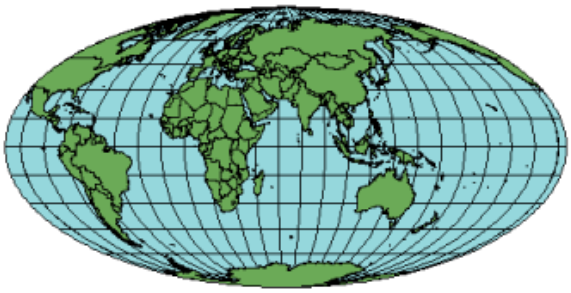


La proyección **Hammer-Aitoff** es una proyección equiareal, conserva las superficies. La distorsión se incrementa a medida que aumenta la distancia respecto de los ejes centrales.

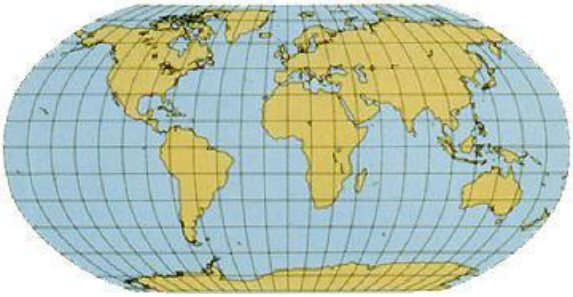
Su proyección en el plano tiene forma de elipse. El Ecuador es el eje mayor. Los paralelos restantes se curvan.
Un meridiano central, que puede ser el meridiano de Greenwich o cualquier otro, funciona como el eje menor de la elipse.



La **proyección Robinson** es un ensayo para equilibrar los diferentes tipos de distorsiones que supone una proyección. Busca no deformar excesivamente ni los ángulos, ni las superficies, ni las formas.
Los paralelos se mantienen rectos y paralelos. Están espaciados a intervalos regulares entre los 38°N y los 38°S, por lo que quedan un poco más atenuadas las distorsiones respecto de las proyecciones equirrectangulares.
Los meridianos están espaciados a intervalos regulares y se curvan sin converger en los polos.



La **proyección Mollweide** es una proyección equivalente: conserva áreas y distorsiona formas. Tiene una escala norte-sur decreciente hacia los polos y creciente en las proximidades del Ecuador. Las franjas de latitudes medias son las zonas de menor distorsión.

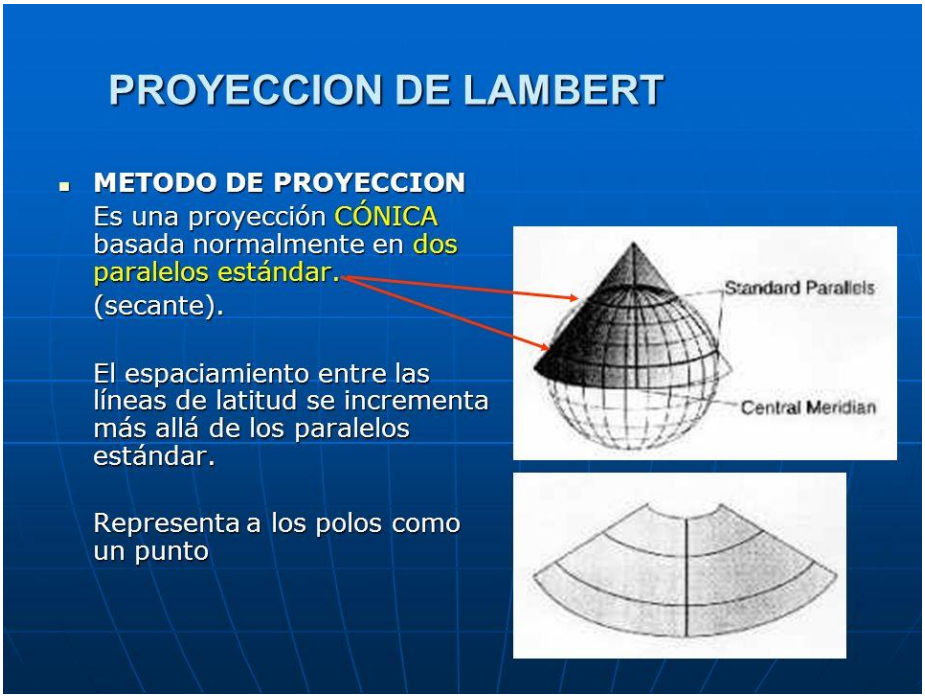


Sacrifica el espaciado regular de los paralelos para preservar las relaciones de área sin distorsionarlas en las zonas marginales.
Los meridianos son elipses redondeadas.

La **proyección cónica conforme** conserva los ángulos. La posibilidad de mantener distancias precisas hace que esta proyección sea utilizada para la navegación aérea.
Los paralelos son arcos de circunferencias concéntricas. La distorsión aumenta progresivamente a medida que aumenta la distancia respecto del paralelo de referencia. Por eso, el hemisferio que no contiene el paralelo de referencia se ve severamente afectado.
Los meridianos son radiales que tienden a converger a un polo.

La **proyección cónica conforme de Lambert** introduce la variante de utilizar dos paralelos de referencia.

La cara lateral del cono es secante a la esfera en vez de ser tangente.



Proyección	Clasificación	aplicaciones	Características
Albers	Cónica equivalente	Mapas temáticos. Sirve para mapear áreas con extensión predominante de este-oeste	Conserva áreas. Substituye con ventajas a todas las otras cónicas equivalentes.
Bipolar	Cónica conforme	Indicada para base cartográfica confiable dos continentes americanos.	Conserva ángulos. Es una adaptación de cónica de Lambert.
Cilíndrica equidistante	Cilíndrica equidistante	Mapamundi. Mapas escalas pequeñas. Trabajos computacionales.	Altera áreas. Altera ángulos.
Gauss	Cilíndrica conforme	Cartas topográficas antiguas. Mapa básico en escala media Y grande.	Altera áreas (las distorsiones < 0,5%). Conserva ángulos. Similar a UTM con desfase de 3 de longitud entre los meridianos centrales.
Estereográfica polar	Plana conforme	Mapa de regiones polares. Mapa de Luna, Marte y Mercurio.	Conserva ángulos. Ofrece distorsiones de escala.
Lambert	Cónica conforme	Cartas generales y geográficas. Cartas militares. Cartas aeronáuticas del	Conserva ángulos.

		Mundo.	
Lambert million	Cónica conforme	Cartas en millonésimo.	Conserva ángulos.
Mercator	Cilíndrica conforme	Cartas náuticas. Cartas geológicas y magnéticas. Mapamundi.	Conserva ángulos.

POSIBLES SOLUCIONES Y COMENTARIOS

1. Sus caras son hexágonos y pentágonos. Si quisiéramos cubrir una superficie plana no lo podríamos hacer (el hexágono tesela el plano, pero el pentágono regular no).
Cuando la pelota de fútbol se infla, el material con que está hecha es flexible (cuero o sintético) y en forma natural al hacer presión el aire en su interior éste hace que las caras se curven y la pelota se estire y tienda a transformarse en una esfera. De todos modos, el modelo del poliedro nos permite comprobar que la superficie esférica no se puede colocar en forma plana.
Para ello le podemos pedir a los estudiantes que intenten cubrir una pequeña superficie con hexágonos y pentágonos y verán que esto es imposible. ¿Por qué?
Se puede justificar analizando la amplitud de los ángulos interiores de estos polígonos y ver que en los puntos vértices (para cubrir el plano) deben sumar 360° (y no lo hacen).

2. La proporción entre las distancias no se conserva.
De alguna manera en el planisferio hubo deformaciones (en general estiramientos) para que se pueda representar el globo terráqueo.

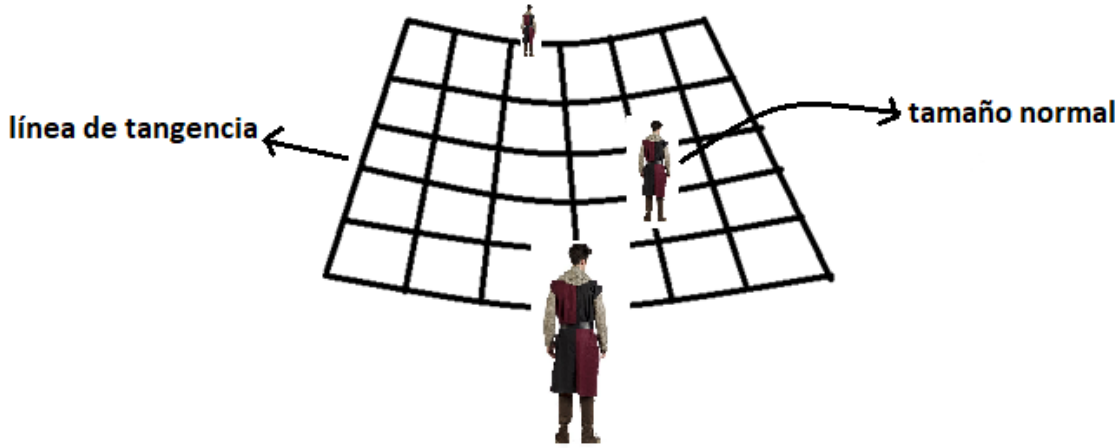
3.

Si se aplanan los gajos contra la superficie, quedan espacios en ésta sin cubrir.

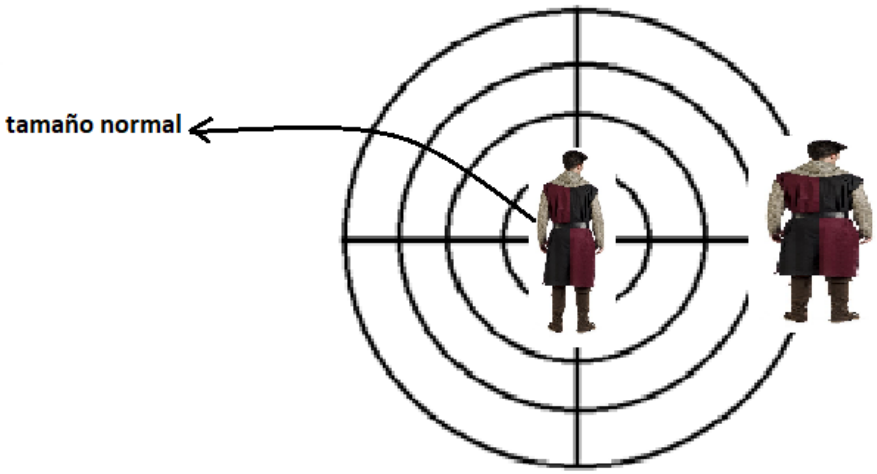
4. Al juntar los meridianos en los polos (como debe ser en el globo terráqueo), se nos arruga el papel (sobra papel).

5. Las redes para construir cuerpos geométricos no cubren una “porción convexa” del plano.

6.



7.



8.

Proyección	**¿Cómo resultan los paralelos y meridianos?**	**¿Dónde se deforma?**
Cilíndrica	Son perpendiculares	En los polos
Acimutal	Los paralelos son círculos concéntricos y los meridianos convergen en el centro	En los bordes del círculo que se origina de la proyección sobre el plano tangencial.
Cónica	Los paralelos son arcos concéntricos y los meridianos convergen en el centro del sector circular	Hacia arriba de la línea de tangencia la figura se achica, y hacia abajo se agranda.

9. a. Producción libre.
b. Acimutal o plana.

Actualmente la geometría de las transformaciones ofrece la posibilidad de hacer más simples las demostraciones de los teoremas geométricos, porque involucran conceptos muy útiles y fuertes como lo son la biyección, la homotecia, integrándose a las estructuras conceptuales anteriores en un proceso de reconstrucción. "Esta reorganización simplifica los problemas antiguos y permite la reducción del campo de los problemas necesarios para la aprehensión de los conocimientos teóricos" (**Brousseau, G. 1986.** ***Fondements es méthodes de la didactique des mathématiques,*** **Bourdeos*****)***

ANEXO 2

ANALIZANDO OBRAS DE ARTES A LO LARGO DE LA HISTORIA

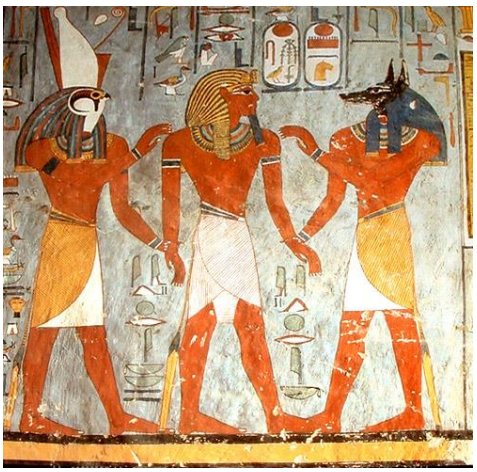
Las obras de arte a lo largo de la historia han plasmado de una manera u otra los momentos que trascendían, en especial los religiosos, políticos y sociales. En algunos períodos se intentó reproducir la realidad de la mejor manera, utilizando recursos geométricos como la proyección y la perspectiva, y en otros períodos prevaleció más lo religioso o social.

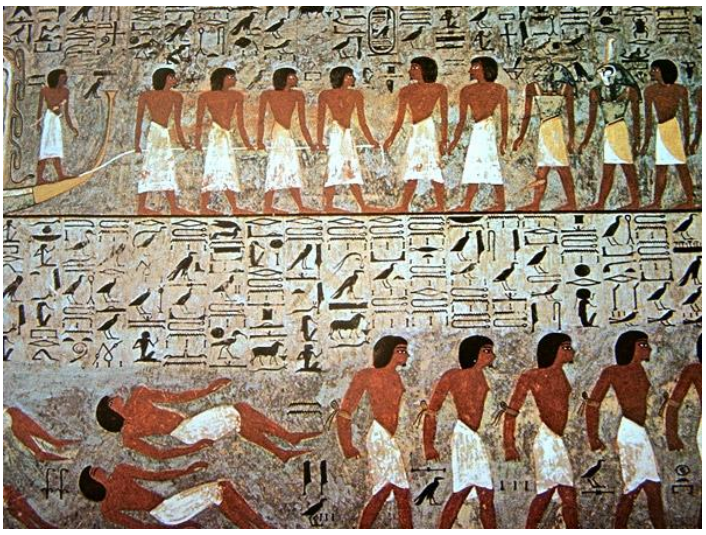
A continuación, se presentan algunas obras de arte (se pueden agregar otras o reemplazarlas) pertenecientes a distintas culturas y distintas épocas. La idea es reconocer en algunas de ellas el uso de la geometría y la matemática como recurso para representar la realidad. En otras es interesante destacar la influencia social y religiosa de la época (por ejemplo, distintos tamaños en las figuras humanas para las distintas jerarquías).

Por ejemplo, ¿qué movimientos rígidos se observan en las siguientes obras de arte y edificios del **ARTE ISLÁMICO O MUSULMÁN?:**

ARTE EGIPCIO

El arte egipcio tiene una particularidad: las partes se representan desde el ángulo más representativo, por ejemplo, la nariz de perfil y el ojo de frente. Y si hay una vasija supuestamente con elementos en el interior, éstos se dibujan arriba para que se puedan ver todos (si es la decoración de una tumba, para que los muertos tengan presente todos esos elementos terrenales en la eternidad.



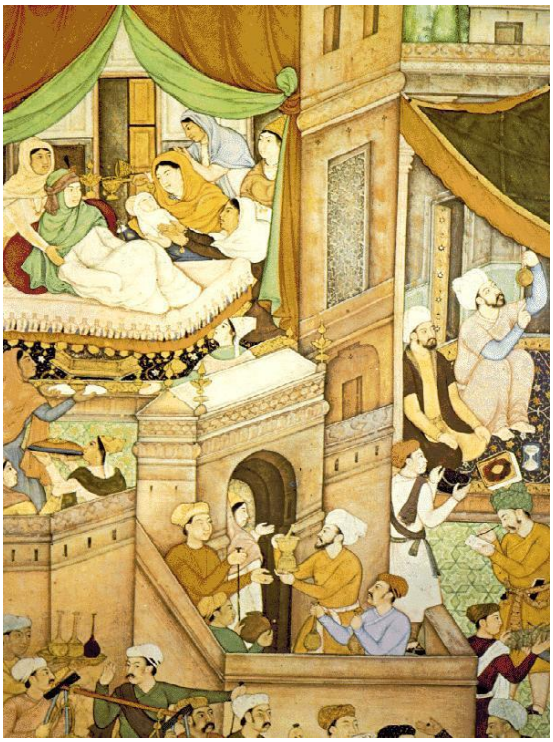


En la historia de la matemática, el estudio de la afinidad y de la proyectividad ha estado, fuera de dudas, influenciado por las observaciones de las sombras. Observando a su alrededor, se vio que el Sol y los efectos producidos por las sombras de los objetos estaban siempre presentes, a disposición de las ciencias, de los artistas, de toda la humanidad. El hombre observó desde los tiempos más antiguos que la sombra de una varilla variaba de momento en momento y podía así indicar el transcurso del tiempo o la altura de monumentos. También observó que las sombras de una fila de árboles o de columnas permanecen paralelas.

En épocas en que la religión tuvo un peso muy grande en las obras de arte, más que la representación fidedigna de la figura, se buscaba darle jerarquía "jugando" con los tamaños, ubicaciones y colores. Importaba más el aspecto simbólico. Por ejemplo, esta obra es un tallado en madera del siglo V. Podemos deducir que la figura central es Cristo. ¿Por qué?

Arte gótico. *Virgen de la leche*. Jaime Sena. Segunda mitad del siglo XIV. Originario de la Iglesia de Tobed en Zaragoza. Observar los colores (prevalece el azul y dorado), tamaños y posiciones:

La siguiente es una miniatura persa (Arte musulmán) del siglo XV. Empieza a aparecer un intento de perspectiva.



Ya en el siglo XV, los artistas del Quattrocento observaron que, si la luz provenía de un foco puntiforme, las sombras de rectas paralelas no son paralelas. Los artistas que hasta este momento habían preferido seguir con las convenciones en cuanto a la reproducción de la realidad, empezaron a observar el mundo que los rodeaba. El grabado de Albrecht Dürer "El espacio afín" es una de las primeras obras con que se resalta la sombra producida por los rayos del Sol.

Aquí, San Jerónimo en su estudio. A. Durero (1521)

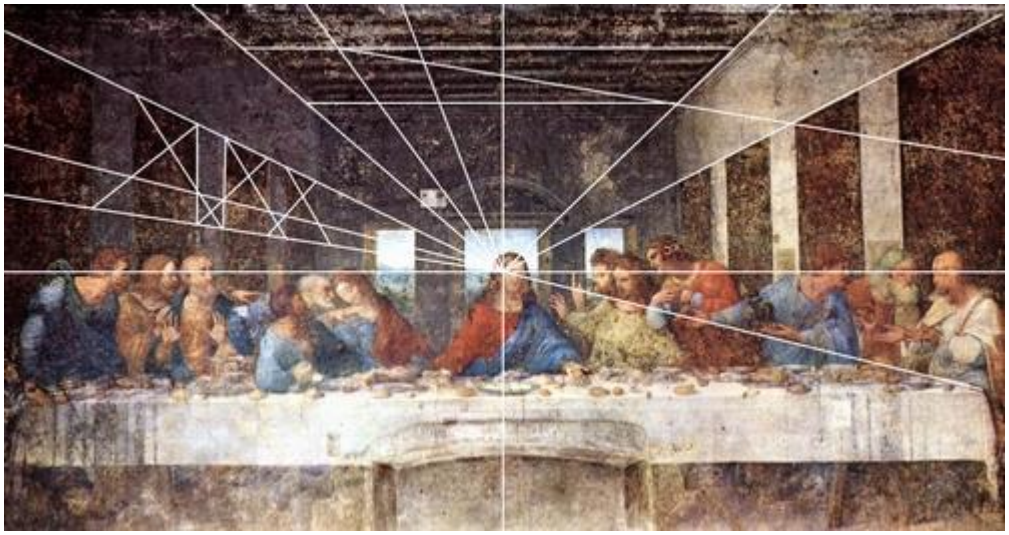
Con referencia al espacio proyectivo se pueden confrontar cuadros en los que se realza una perfecta perspectiva con otros en los que se nota la falta absoluta de ella. ¡Si tomamos las reproducciones de "dos paneles geométricos" de Giotto (1266-1337), resulta claro cómo él conoce perfectamente la perspectiva! Sin embargo, en todas sus obras, Giotto se vale de técnicas de color y de posición para darle profundidad al ambiente.

Adoración de los Magos. Giotto

Es en esta época (siglo XV), el Renacimiento, que en el arte se refleja una búsqueda o acercamiento a la realidad. Es así que se produce uno de los cambios más importantes, el estudio de la perspectiva. Uno de los precursores fue Giotto (S. XIV) y por supuesto seguido por muchos más. Se trataba de poder pintar un objeto sobre la tela y que pareciera estar "más allá" de la misma.

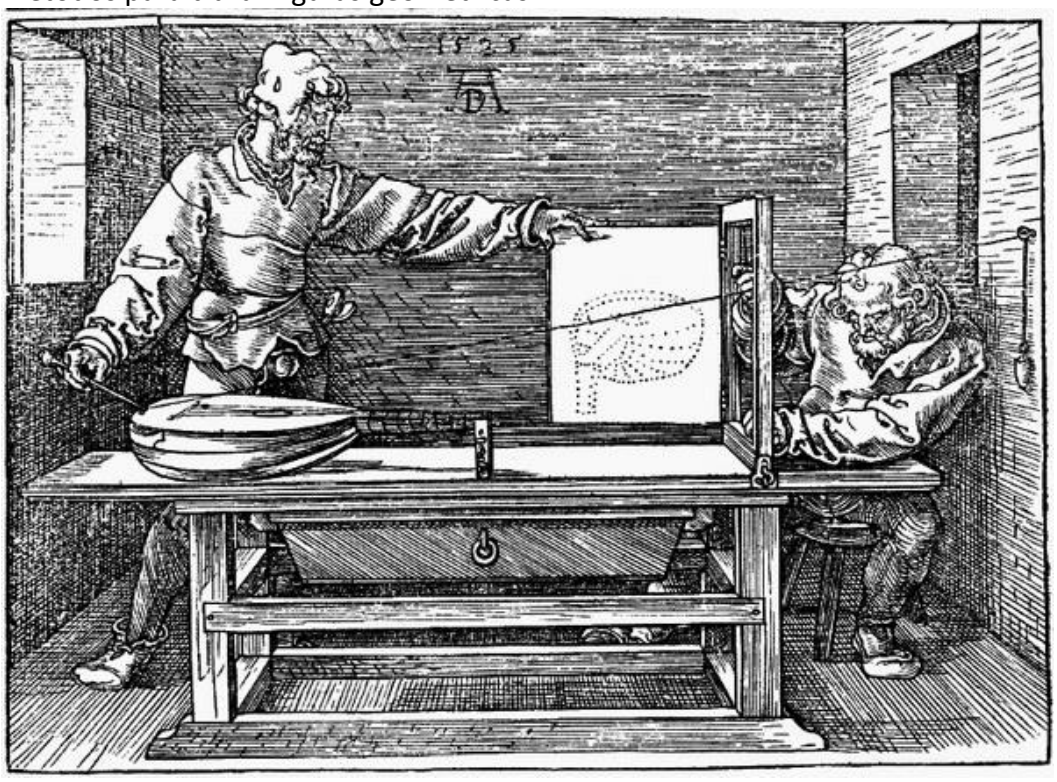
El nacimiento de San Nicolás, su vocación y la distribución de limosna a los pobres (1437) se ve un acercamiento mayor al uso de la perspectiva.

Veamos algunas obras en las que se puede observar el progreso en este aspecto.
Observar La última cena de Giotto con una perspectiva muy básica y compararla con *La última cena* de Leonardo da Vinci.



Ya en la escuela italiana se pueden apreciar en algunos bocetos, cómo los artistas utilizaban las reglas de la perspectiva bien combinadas (punto de fuga, línea del horizonte, etc.).

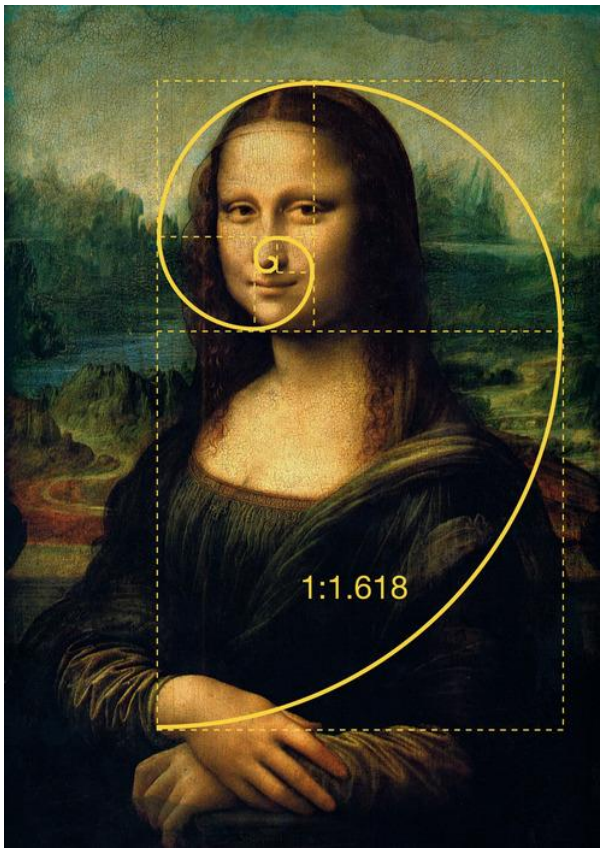
El Renacimiento italiano supera pronto el realismo sensorial y lo somete a las leyes del espíritu. La geometría y sus sabias combinaciones de forma, ritmos y proporciones ordenan el espacio. El artista se revela muy próximo al geómetra y al matemático.
En 1525, tres años antes de morir, el genial pintor renacentista y gran enamorado de las Matemáticas, Alberto Durero (1471-1528) publica una obra titulada *Instrucción sobre la medida con regla y compás de figuras planas y sólidas.* Es un precioso libro en el que pretende enseñar a los artistas, pintores y matemáticos de la época diversos métodos para trazar figuras geométricas.

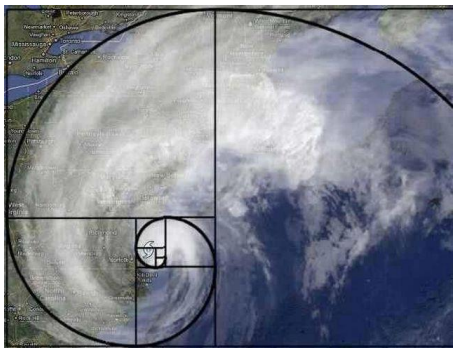


Alberto Durero, Instrumento perspectivo: pasador en la pared como punto de mira y

punzón para los puntos del objeto; ventana con dos hilos móviles y postigo abatible. (De "*Underweysung der Messung*", Nuremberg, 1525)

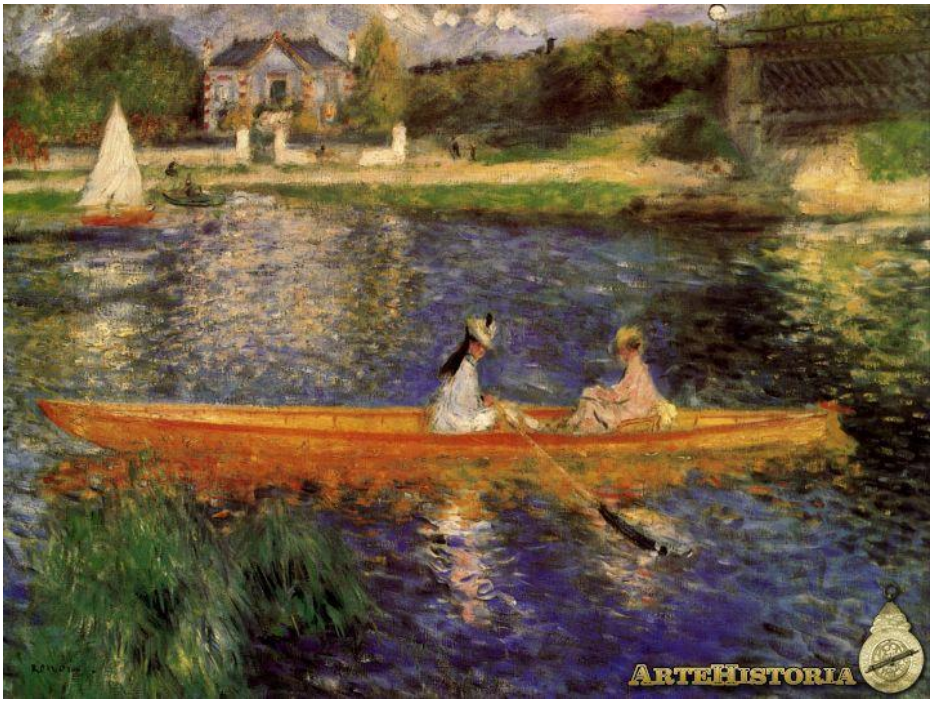
En esta obra Durero muestra cómo trazar con regla y compás, algunas espirales y entre ellas una que pasará a la historia con su nombre: la Espiral de Durero.
Es una de las espirales gnómicas basadas en el famoso número de oro (número irracional, aproximadamente 1,618…), o mejor dicho, en los rectángulos áureos.
Los rectángulos áureos son aquellos cuyos lados están en proporción áurea, es decir, el cociente entre su lado mayor y su lado menor es precisamente el número de oro.
Los artistas comenzaron a observar y a seguir las experiencias al sol o a la luz de una lámpara, viendo que el "efecto sombra" no siempre es el mismo. ¡Los estudiantes pueden hacerse las mismas preguntas que se hacían los pintores del Quattrocento!





La Gioconda. L. Da Vinci

Pero las transformaciones afines se estudian como caso particular de las transformaciones proyectivas recién con Möebius (1790-1868) quien fue el primero en introducir las coordenadas homogéneas en geometría proyectiva.
¡Y cómo nos vamos acercando más a la realidad!



Pierre Renoir – La Yola (1875)

Hemos visto que, a lo largo de la historia, las obras de arte pictóricas transitan por distintas épocas en las cuales razones políticas o religiosas u otras influyen en las representaciones. Por ejemplo, si se quería jerarquizar un personaje (supongamos Jesucristo) se lo dibujaba de un tamaño mayor con respecto a los demás personajes de la obra. No se trataba de una representación "real", pero hay que tener en cuenta que el fin era otro.
En la época del impresionismo justamente fue todo lo contrario, se trató de plasmar, con la mayor naturalidad y fidelidad, lo que se estaba observando (ver el cuadro de Renoir).
Surgieron las técnicas de la perspectiva que tienen mucho que ver con nuestras transformaciones proyectivas. Ya hemos visto que la transformación proyectiva proviene de un foco y se "proyecta" sobre un plano que puede ser paralelo a lo que se quiere proyectar (daría una semejanza) o no.

Pero…en algún momento (siglo XX) nos escapamos otra vez de las representaciones fidedignas de la realidad (por ejemplo, por el cubismo en donde el modelo va "girando" y se representan partes desde distintos ángulos. (¿Parecido a los egipcios?). En ellas hay obras en las que se refleja fuertemente el mensaje (social en este caso) del artista.

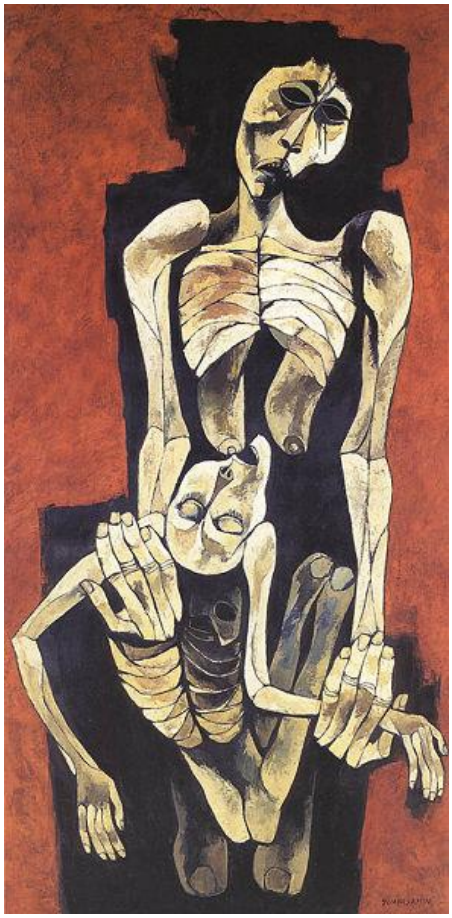
Por ejemplo, cómo se puede ver en esta obra extraordinaria de Picasso, "Guernica":

Guernica es un cuadro de Pablo Picasso, pintado en París entre los meses de mayo y junio de 1937, cuyo título alude al bombardeo de Guernica, ocurrido el 26 de abril de dicho año (1937), durante la guerra civil española. Fue realizado por encargo del director general de Bellas Artes, Josep Renau, a petición del Gobierno de la Segunda República Española para ser expuesto en el pabellón español durante la Exposición Internacional de 1937 en París, con el fin de atraer la atención del público hacia la causa republicana en plena guerra civil española. Su tamaño es de 3,49m. x 7,77m.

En la década de 1940, puesto que en España se había instaurado la dictadura militar del general Franco, Picasso optó por dejar que el cuadro fuese custodiado por el Museo de Arte Moderno de Nueva York, aunque expresó su voluntad de que fuera devuelto a España cuando volviese al país la democracia. En 1981 la obra llegó finalmente a España. Se expuso al público primero en el Casón del Buen Retiro, y luego, desde 1992, en el Museo Reina Sofía de Madrid, donde se encuentra en exhibición permanente.

Su interpretación en profundidad es objeto de controversia, ya que varias figuras son simbólicas y suscitan opiniones dispares; pero su valor artístico está fuera de discusión. No solo es considerado una de las obras más importantes del arte del siglo xx, sino que se ha convertido en un auténtico «icono del siglo xx», símbolo de los terribles sufrimientos que la guerra inflige a los seres humanos. El crítico Robert Hughes afirmó del *Guernica* que era «la última gran pintura histórica», y que fue asimismo el último lienzo moderno de relevancia en utilizar un tema político para concienciar al público, labor que a finales de la Segunda Guerra Mundial pasaría a realizar la fotografía bélica.

Veamos algunas obras del artista ecuatoriano Oswaldo Guayasamín, (1919-1999), muy comprometido con la realidad social de América Latina y el mundo. Este cuadro se denomina “Madre de la India”:

de 

Las dos figuras esqueléticas representan una madre con sus últimas reservas de vida intentando revivir a su hijo muerto dándole mamar.

Como se dijo anteriormente, no se trata de representar en forma fiel una imagen, pero se siente muy profundamente el sentido y sentimiento que el artista quiere transmitir.
Del mismo autor, la siguiente obra, denominada “Potosí en busca de la luz y la libertad“, está realizada en la cúpula de un museo en Quito. En ella se ve a los esclavos en las minas de plata buscando la salida a la que nunca llegan. La salida de la mina es un agujero real hecho en el techo del museo y da al exterior.
La muestra del sufrimiento y dominación que se logra percibir es innegable de la época, ya que es posible sentir la nostalgia de una ciudad explotada que conserva una triste memoria de sus riquezas, las ruinas de sus iglesias y palacios que permanecen como una herida abierta hasta hoy y se ven reflejadas en gran parte de la obra de Guayasamín. La denuncia que se hace a la colonización de América Latina se ve reflejada claramente en sus obras, la cual trae a la memoria aquellas escenas de opresión, sufrida por los indígenas en la época, y nos lleva a la reflexión de que aún en la actualidad se ve y se siente la lucha por preservar esa identidad que por mucho tiempo ha sido ocultada y desvalorizada. Se pueden observar a los esclavos intentando llegar a la luz, a la cual nunca llegan y mueren ahí. Hay todo un mensaje en sus obras.

REFERENCIAS

- BRESSAN, A. M. y otros (2000): *Razones para enseñar geometría en la Educación Básica.* Ed. Novedades Educativas.
- CASTELNUOVO, E. (1970) *Didáctica de la Matemática Moderna.* Ed. Trillas.
- DIENES Z y GOLDING E. (1999) *Los primeros pasos en matemática. La geometría a través de las transformaciones.* Ed. Teide
- HUYGHE, R. (1966): *El arte y el hombre.* Ed. Larousse.
- PINASCO, J. P. y otros (2009): *Las Geometrías.* Colección Las ciencias naturales y la matemática. INET Edu-ar
- PONCE, MARCELO J. (2017): "Resignificar el quehacer geométrico" (artículo). Novedades Educativas. N° 318 Año 29.
- PROCIENCIA-CONICET: *Geometría, su enseñanza. 1986.*
- RABINO, A. y CUELLO, P. (2017): Matemática realista en la Educación Secundaria. Proyectos con secuencias didácticas. Ed. Novedades Educativas.
- TREJO, C. (1972): *Matemática Elemental y Moderna. Ed.* Eudeba.
- VARELA, L., SANTALÓ, L. y otros (1986): *Geometría, su enseñanza.*
- https://es.wikipedia.org/wiki/MiguelAngel
- www.ite.educacion.es
- www.mat.ucm.es
- www.aparences.net
- http://www.educ.ar/sitios/educar/recursos/ver?id=20029
- https://es.slideshare.net/AndreaVanessa/proyeccion-cilndrica