

¡QUÉ ABSURDO!

Contenidos: Demostración de propiedades. Ejemplo de demostración por el absurdo.

Adriana Rabino

Existen varios caminos para demostrar formalmente propiedades (*teoremas*) y en todos se respeta como principio la lógica proposicional.

Si se quiere realizar una demostración en forma directa, se tiene en cuenta la siguiente proposición compuesta: $p \Rightarrow q$, donde p y q son proposiciones (que pueden ser verdaderas o falsas, pero para el caso de los teoremas se parte de que p siempre es verdadera y que q es lo que hay que demostrar). En este caso se denominan *hipótesis* (para p) y *tesis* (para q).

Entonces si se parte de que la hipótesis es verdadera, para que esta proposición compuesta sea verdadera, la tesis debe ser verdadera. Esto se ve claramente si se hace una tabla de verdad:

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

El camino es el siguiente: se toma la hipótesis como verdadera y se trata de demostrar (utilizando definiciones, axiomas o teoremas ya demostrados) entonces que la tesis debe ser verdadera también para que la proposición compuesta lo sea. De esta manera quedaría demostrado el teorema.

Hay una proposición compuesta que es equivalente a la anterior, $\text{no } q \Rightarrow \text{no } p$ (ya que tiene la misma tabla de verdad), que también se puede utilizar cuando el camino directo se torna complicado. Este método que se denomina **contrarrecíproco**, funciona de la siguiente manera: se comienza negando la tesis (lo que se quiere demostrar) y se debe llegar a la negación de la hipótesis. Este camino es válido como el directo, quedando así demostrado el teorema.

Hay muchos otros métodos para poder demostrar una propiedad. El secreto está en la habilidad de elegir el método más conveniente en cada caso para lograr el objetivo.

Hay un método que se denomina por **contradicción** o por **absurdo** y actúa de la siguiente manera: se trata de negar la proposición compuesta $p \Rightarrow q$ utilizada anteriormente y, si se llega a una contradicción o a un absurdo debemos admitir que este absurdo proviene de negar $p \Rightarrow q$, por lo tanto se admite que $p \Rightarrow q$ es verdadera.

¿Cuál es la negación $p \Rightarrow q$? Esta es $p \text{ y no } q$. Es fácil de demostrar, si hacemos una tabla de verdad, nos da totalmente contraria a la anterior:

p	q	$\text{no } q$	$p \text{ y no } q$
V	V	F	F
V	F	V	V
F	V	F	F
F	F	V	F

Ahora sí, vamos a trabajar con el siguiente problema y veamos si se puede resolver, y en ese caso qué camino conviene seguir:

Dos amigos se encuentran después de muchos años. Uno de ellos está casi pelado y el otro se enorgullece de tener toda su cabellera abundante y “completa”. Entre charla y charla, y broma y broma, hablando de cómo los trató el paso del tiempo, este último le dice a su amigo: “No creo que haya alguien con tanto cabello como yo”. El amigo le responde: “Parece un chiste, pero eso es imposible de verificar, ¿te podés pasar la vida contándole la cantidad de cabellos a tooodas las personas!”

¿Será cierto que es imposible, o en tal caso, muy difícil?

Supongamos que acotamos la cantidad de personas a nuestro país. ¿Se podrá asegurar que en la Argentina hay otra persona que tenga la misma cantidad de cabellos que uno mismo?

*Este problema se puede plantear de la siguiente manera: **¿Se puede asegurar que en la Argentina hay por lo menos dos argentinos que tienen igual número de cabellos?***

(Considerar que la Argentina tiene 45 millones de habitantes y que nuestro cuero cabelludo tiene, en promedio, 250 cabellos por cm^2 o 2,5 cabellos por mm^2).

El amigo dijo que era muy difícil contarles la cantidad de cabellos a todas las personas. En realidad lo que le está diciendo (aunque tal vez no lo sepa) es que el método directo es muy complicado para demostrar esta proposición. ¡Y tiene razón! ¡Hasta creyó que podía ser imposible!

Expresemos el problema en término de p y q , entonces $p \Rightarrow q$ sería:

Si se considera la población de Argentina, entonces hay por lo menos dos argentinos que tienen la misma cantidad de cabellos.

En donde p es: ser argentino y q : hay por lo menos dos argentinos con la misma cantidad de cabellos.

Probemos el método de contradicción a ver si llegamos a algún puerto.

Para ello debemos considerar que hablamos de argentinos (aceptamos p), pero que todos tienen diferente cantidad de cabellos (negamos q), o sea **p y no q** : *Si se considera la población de Argentina, entonces todos los argentinos tienen diferente cantidad de cabellos.*

Si esto fuera así, quiere decir que, como máximo, 1 argentino tiene 0 cabellos (pelado total), otro argentino tiene 1 cabello, otro tiene 2 cabellos, y así sucesivamente hasta que el último argentino contabilizado tendría 45 millones de cabellos. Como en promedio el ser humano tiene 250 cabellos por cm^2 , necesitaría un cuero cabelludo de $180\,000\,\text{cm}^2$ ($45\,000\,000$ cabellos : 250 cabellos/ cm^2), o lo que es lo mismo que decir que su superficie capilar es de 18 metros cuadrados. **¡Un absurdo total!**

Este absurdo proviene de negar la proposición $p \Rightarrow q$, por lo tanto se debe admitir que $p \Rightarrow q$ es verdadera. O sea que no puede ser que todos los argentinos tengamos distinto número de cabellos, por lo menos hay dos (segurísimo que muchas más) personas con igual número de cabellos.