“LA QUINTA OPERACIÓN MATEMÁTICA”

Potenciación. Recopilación de problemas

Con frecuencia se denomina al álgebra la “aritmética de las siete operaciones”, queriendo subrayar con ello que a las cuatro operaciones matemáticas conocidas por todos, el álgebra añade tres más: la elevación a potencias y sus dos inversas.
Comencemos nuestras pláticas algebraicas por la “quinta operación”: la elevación a potencias.
¿Responde esta operación a una exigencia de la vida práctica? Indudablemente.
Con ella tropezamos a menudo en la vida. Recordemos los innumerables casos en que para calcular superficies y volúmenes se precisa elevar los números a la segunda o tercera potencia.
Otro ejemplo: la fuerza de gravitación universal, la acción recíproca electrostática y magnética, la luz y el sonido son inversamente proporcionales al cuadrado de las distancias.
La continuidad de la traslación de los planetas alrededor del Sol (o de los satélites alrededor de los planetas) viene expresada también en forma de una potencia dependiente de la distancia que les separa de su centro de traslación: la relación entre los cuadrados de los tiempos de traslación es igual a la relación entre los cubos de las distancias.
Es un error pensar que en la práctica tropezamos tan sólo con segundas y terceras potencias, y que no existen exponentes de potencias superiores más que en los manuales de álgebra. Cuando un ingeniero busca el grado de solidez de un cuerpo se ve obligado a operar a cada instante con cuartas potencias; y en otros cálculos (para hallar el diámetro de tubo conducto de vapor, por ejemplo) llega a operar incluso con la sexta potencia. Asimismo, los técnicos hidráulicos se valen de las sextas potencias cuando tratan de averiguar la fuerza con que son arrastradas las piedras por el agua: si la corriente de un río es cuatro veces más rápida que la de otro, el primero es capaz de arrastrar por su lecho piedras 4^6, es decir 4096 veces más pesadas que el segundo río.... (Extraído de Perelman Y.: *Álgebra Recreativa*. Ed. MIR. 1978).

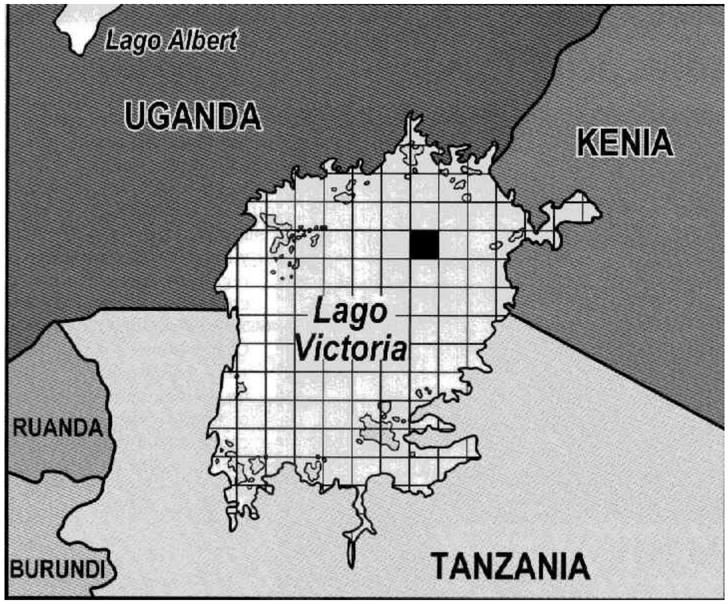
PROBLEMAS DE POTENCIACIÓN PARA DISTINTOS NIVELES

A) **Planta sobre el lago victoria**

Una planta sobre el Lago Victoria duplica el área que cubre cada año (ver figura). Un cuadrado de esta cuadrícula está coloreado para representar el área cubierta por la planta en un año, por ejemplo el actual.
¿Cuánto quedará cubierto al año siguiente? ¿Y al otro?........

Angela usó un color diferente para representar el crecimiento de cada año. Ella dice: “El número de cuadrados que coloreo para un cierto año es exactamente igual que el número ya coloreado”.
- ¿Es cierto lo que dice Angela? Compruébalo en el dibujo.
- ¿Cuántos años demorará la mitad del lago en quedar cubierta?

- ¿Cuántos años demorará el lago en quedar totalmente cubierto? (Extraído y adaptado de la unidad Crecimiento de la colección La matemática en contexto. Britannica. 1997)



B) **Mails en cadena**

Muchas veces nos llegan mails en cadena como el siguiente: "C*opia íntegramente este e-mail y pégalo en el nuevo que vas a enviar, cambia todas las respuestas a las preguntas por las tuyas, después envíalo a todos tus amigos incluyendo a la persona que te lo envió. La teoría es que vas a conocer muchas pequeñas cositas acerca de tus amigos. Acuérdate de enviarlo a la persona que te lo mandó (espero recibirlo, entonces no solo seré tu amigo, sino que sabremos más uno del otro. De lo contrario, puedes perderme como amigo).*

1. Qué hora es: 13:40
2. Nombre: Mariela
3. Tu cumpleaños: 18 de marzo
4. Signo Zodiacal: piscis/dragón
5. Años: 54, aunque me siento de 35
6. Tatuajes: no
7. Has estado en otro continente: no
8. Amaste tanto a alguien como para llorar: si
9. Has estado en un accidente de coche: más de uno
10. Has tenido alguna fractura: no

.........y 40 preguntas más.

Nota: Este problema, así planteado, es muy abierto. Los alumnos pueden empezar a cuestionar ciertos datos que no son conocidos. Es necesario hacer acuerdos ya que para responder preguntas dependen de muchos factores, pero se podría discutir ciertas cosas o promediar otras. Por ejemplo, suponer que cada persona tiene un promedio de 25 amigos *en su lista, y que sólo el 40 por ciento cree en la “maldición” , tener en cuenta que los amigos lo son entre sí, esto quiere decir que muchos mails volverán.., cuánto tiempo tardan en reenviar. Anticipar las discusiones que se pueden generar y cómo coordinarlas. Elaborar preguntas, por ejemplo: ¿con cuántos reenvíos podría llegarle a toda la población?*

Otra problema similar puede ser... ¿Vieron la película Cadena de Favores?
El problema que planteó Mary me pareció muy bueno. Una buena noticia se difunde por3, en cambio una mala se difunde por7. Comparar ambas en el transcurso de un tiempo.

C) **¿Por la cocina cómo andamos?**

Durante la división celular, una bacteria se divide en mitades, formando dos células nuevas. Luego cada bacteria se divide nuevamente, y así sucesivamente. Se dice que estas bacterias tienen un factor de crecimiento 2.
Dos mil bacterias están creciendo en la esquina de la mesada de tu cocina. Tú decides que es hora de asear la casa. Usas un limpiador cuya efectividad en matar es del 99%.
¿Cuántas bacterias sobreviven?
Si el número de bacterias se duplica cada 20 minutos, ¿cuánto demorará aproximadamente en haber la misma cantidad que antes?

D) **Potencias de 3**

$3^0 = 1$
$3^1 = 3$
$3^2 = 9$
$3^3 = 27$
$3^4 = 81$
$3^5 = 243$
$3^6 = 729$

¿Qué puedes decir con certeza acerca del último dígito de 3^8? ¿Y el de 3^{10}? ¿Y cuál es el último dígito de 3^{20} ?Escribe una regla que permita saber cuál es el último dígito de las potencias de 3 (Extraído de Zolkower Betina).

E) **Diez pliegues**: ¿Cuántos rectángulos pequeños se forman al plegar por la mitad una hoja rectangular de papel 10 veces consecutivas?

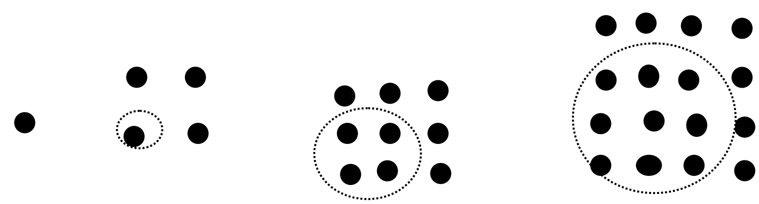
F) **Negativo o positivo**: Sean x e y enteros cualesquiera tales que x es distinto de y. Para cada una de las operaciones siguientes, indicar si su el resultado es siempre positivo, siempre negativo, o si puede ser uno u otro dependiendo de los valores de x y de y.

a) $x^2 – y^2$
b) $x^2 –2xy + y^2$
c) $x^2 + 2xy – y^2$
d) $x^3 + y^3$

G) Ilustración geométrica: usar el modelo de área para ilustrar geométricamente la siguiente desigualdad:

$4ab \leq \ (a + b)^2$

H) Usa los siguientes **patrones** de puntos para describir el aumento en la secuencia de números elevados al cuadrado:



Los cuadrados de 20 y 21 son 400 y 441 respectivamente.

a. Sin multiplicar y utilizando el aumento en la secuencia, halla el cuadrado de 22.
b. Idem para 18.

I) ¿Cuál es el último dígito de $1 + 9^2 + 9^3 + 9^4 + 9^5 + 9^6 + ... + 9^{2006}$?

J) Comparar los siguientes números:

$421^3, 43^{21}, 21^{43}, 4^{321}, 3^{421}, 2^{431}$

K) ¿Con cuántos ceros termina $9^{999} + 1$?

L) Sin hacer las cuentas, decidir para cada uno de los siguientes productos si son pares o impares:

$2^9 \times 3^{12}$ $\quad$ $5^{10} \times 4^{21}$

$7^{60} \times 2^{39}$ $\quad$ $6^{45} \times 4^{45}$

<u>Definición:</u> Dados dos números b (racional) y n (natural), se denomina potencia enésima de b, que se denota b^n, al número que resulta de multiplicar n veces al número b:

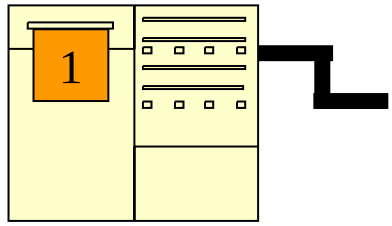
B^n = b.b.b..........b (n veces)

Al número b se lo llama <u>base</u> de la potencia y al número n se lo denomina <u>exponente</u> de la potencia.

En particular, si n = 2 se dice que se calcula el cuadrado de b; si n = 3 se dice que se calcula el cubo de b. ¿Por qué?

<u>2) PROPIEDADES DE LA POTENCIACIÓN</u>

A) **La máquina que multiplica por 10**



Arriba puedes ver la máquina que multiplica por 10. En la posición inicial puedes ver el número 1 en la cinta.

Si giras la manija hacia delante, este número se multiplica por 10 y el resultado aparece en la cinta.

Si das otra vuelta a la manija, el número de la cinta se multiplica de nuevo por 10 y el resultado es 100.

1. Si comienzas en la posición inicial, ¿cuántas veces tendrías que girar la manija para obtener 10.000.000 ?
2. **a.** Si comienzas en la posición inicial, ¿Cuántas veces tendrías que girar la manija para obtener un número igual a 10^6?
   b. Si en la cinta apareciera 10^6, ¿cuántas veces tendrías que girar la manija para obtener 10^9?

3. **a**. Explica cómo podrías calcular 10^3 x 10^5 usando la máquina.
   b. Calcula 10^3 x 10^3 X 10^3.

4. En la cinta de la máquina aparece el número 100.000. La manija se gira en sentido contrario una vez y la cinta se retira una posición hacia el interior de la máquina.

a. ¿Qué operación aritmética se realizó como resultado de girar la manija en sentido contrario ?

b. ¿Cómo divides un número por 100 con esta máquina?

5. En la cinta de la máquina aparece el número 100.000.000.

a. ¿Cómo podrías dividir este número por 10^3 usando la máquina?

b. ¿Cuánto es 100.000.000 **:** 10^3?

6. Carla quiere mostrar el resultado de 10^7 : 100 usando la máquina . Describe lo que tiene que hacer a partir de la posición inicial (cuando en la cinta aparece el 1).

7. a. ¿Cómo podrías calcular 10^5 : 10^3 en la máquina ? Describe los pasos que seguirías desde la posición inicial.

Para ahorrar tiempo al escribir y contar los ceros de las potencias de 10, puedes usar una notación especial. Unas ***notación exponencial*** el 100.000 puede escribirse como 10^5, y el 10.000.000 como 10^7. ¿Por qué piensas que es así?

b. ¿Cuál es el resultado de 10^5 : 10^3 escrito en notación exponencial?

c. Escribe una regla para multiplicar con potencias de 10. ¿Funciona tu regla para resolver

$2^3 \times 2^5$? ¡ Y para $5^2 \times 10^3$?

8. Escribe una regla de división para potencias de l0.

9. Calcula lo siguiente y escribe los resultados como potencias de 10.
a. $10^7 : 10^5$ **b.** $10^8 : 10^4$ **c.** $10^7 : 10^6$

10. a. Calcula $10^7 : 10^7$ usando tu regla de división.
b. ¿Cuál crees que es el valor de 10°?

Un sistema de abreviación como el que has estado usando para números muy grandes resulta también conveniente para números muy pequeños.

11. Si giras manija de la máquina de multiplicar en sentido contrario, ésta divide por 10. Imagina que empiezas en 1 y que vas girando la manija al revés a partir del 1:

1 : 10 → 0,1 : 10 → 0,01 : 10 → 0,001 : 10 ...
Continúa el patrón anterior.

12. Escribe los resultados en notación exponencial. Por ejemplo:

10.000 = 10^4
: 10
1000 = 10^3
:10
100 = ……
:10
10 = ……..
:10
1 = …..
:10
0,1 = …..
:10
0,01 =…..
:10
0,001 =…..
:10
0,0001 =…..

Recordar:

Notación: suponiendo que $b \neq 0$, se denomina a/b al número real $a.b^{-1}$.

En particular, $\boxed{b^{-1} = 1/b}$

Definición: sea a un número real distinto de 0, se define $\boxed{a^0 = \quad}$

Gentile. E.: *Notas de Álgebra I.* Pág. 20).

13. En un laboratorio médico, cierto líquido contiene 10^{12} bacterias. Una gota de antiséptico mata 10^3 bacterias. ¿Cuántas gotas se necesitan para destruir todas las bacterias?

14. Si construimos una máquina que multiplica por 7 (u otro número), ¿crees que se cumplirían las reglas que descubriste? Prueba. (Extraído y adaptado de MIC *Potencias de 10*).

B) **Tabla de potencias:** La siguiente tabla muestra algunas potencias de 2, 3, 4, 5, 6 y 7.

Completa la tabla con las potencias llegando hasta las potencias de 10. Investiga patrones en esta tabla. Extrae conclusiones.

1	1	1	1	1	1
2	3	4	5	6	7
4	9	16	25	36	49
8	27	64	125	216	343
16	81	256			
32					
64					
…….	…….	…….	…….	…….	……..

C) ¿Qué podemos decir de la siguiente suma:

$$2^{2006} - 2^{2005} - 2^{2004} - 2^{2003} - 2^{2002} - 2^{2001} - 2^{2000}?$$

D) Comparar las dos expresiones siguientes. ¿Cuál da un resultado mayor?

$$100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + 96^2 - 95^2 + 94^2 - \ldots -1^2 =$$
$$100 + 99 + 98 + 97 + 96 + 95\ldots +1 =$$

E) Hallar la respuesta a la siguiente resta de la manera más rápida posible:

$$(666.666.666)^2 - (333.333.333)^2$$

F) **i) Diferencias de cuadrados consecutivos**

Observa:

$3^2 - 2^2 = 3 + 2$
$4^2 - 3^2 = 4 + 3$
$5^2 - 4^2 = 5 + 4$

¿Siempre ocurre esto? Si es así, por qué sucederá?

ii)Diferencias de cuadrados

Continúa cada uno de los siguientes patrones:

$2^2 - 0^2 = 4$	$5^2 - 1^2 = 24$	$3^2 - 0^2 = 9$	$7^2 - 2^2 = 45$
$3^2 - 1^2 = 8$	$6^2 - 2^2 = 32$	$4^2 - 1^2 = 15$	$8^2 - 3^2 = 55$
$4^2 - 2^2 = 12$	$7^2 - 3^2 = 40$	$5^2 - 2^2 = 21$	$9^2 - 4^2 = 65$
…	…	…	…

Usa cuadrados y/o modelo de área para investigar por qué ocurre esta regularidad.

G) **Los tres dos**

Con seguridad que todos sabrán como combinar tres cifras para obtener el número de máximo valor. Deben tomarse tres nueves y operarlos como potencia de otra potencia (9 a la 9 a la 9). Este número es tan grande que es imposible encontrar con qué compararlo.
¿Cuál es la forma de alcanzar el máximo valor con tres dos?
¿Y con tres tres?
¿Y con tres cuatros?
¿Podrías hallar una regla?

H) **Cuatro cuadrados**: en 1770 Joseph-Louis Lagrange mostró que cada entero positivo se puede escribir como la suma de cuatro cuadrados. Por ejemplo: $31 = 2^2 + 3^2 + 3^2 + 3^2$. Descubrir como se puede aplicar esto para algunos enteros positivos mayores que 20.

I) a) **Un cuadrado perfecto**: encontrar un número cuadrado perfecto de 4 dígitos que tenga la forma “aabb”.

b) **Dos cuadrados perfectos**: encontrar dos cuadrados perfectos tales que su diferencia sea 105. ¿Cuántas soluciones tiene?

J) a- **Diferencias de cuadrados consecutivos**: verificar lo siguiente

$$3^2 - 2^2 = 3 + 2$$
$$4^2 - 3^2 = 4 + 3$$
$$5^2 - 4^2 = 5 + 4$$

¿Esto siempre sucede? Si es así, ¿por qué será?

b- **Diferencias de cuadrados:** continuar cada uno de estos patrones:

$2^2 - 0^2 = 4$	$5^2 - 1^2 = 24$	$3^2 - 0^2 = 9$	$7^2 - 2^2 = 45$
$3^2 - 1^2 = 8$	$6^2 - 2^2 = 32$	$4^2 - 1^2 = 15$	$8^2 - 3^2 = 55$
$4^2 - 2^2 = 12$	$7^2 - 3^2 = 40$	$5^2 - 2^2 = 21$	$9^2 - 4^2 = 65$

- Usar hileras de cuadrados y/o el modelo de área para explorar por qué ocurren estos patrones.

K) Explorar la siguiente conjetura: “Todo entero mayor que 2 se puede expresar como diferencia de cuadrados”.

H) ¿Cubos perfectos?: Sea n un entero positivo. ¿Es posible que $n+3$ y n^2+3 sean cubos perfectos?

L) ¿Cuál/es de las siguientes expresiones son divisibles por 3 para valores enteros de x?

$x^3 – x$, $x^3 – 1$, x^3, $x^3 + 1$, $x^3 + x$

M) Verificar si se cumplen las propiedades siguientes.

Propiedades

- *La potenciación no es conmutativa.*
- *La potenciación es distributiva con el producto y con el cociente.*
- *El producto de dos potencias de igual base es otra potencia de la misma base que ellas cuyo exponente es igual a la suma de los exponentes de las mismas.*
- *La potencia de potencia es otra potencia con la misma base cuyo exponente es el producto de los exponentes dados.*

N) Verificar si la potenciación es distributiva con respecto a la suma o a la resta.

3) NÚMEROS CON MUCHAS CIFRAS

A) NÚMEROS MUY GRANDES

A1) **¿Cuántas gotas de lluvia…?** Estaba lloviendo en Bariloche y se preguntó a los niños de Jardín cuántas gotas de lluvia estarían cayendo. La respuesta más alta fue: 100 gotas. Nunca habían contado más allá de 100 y lo que querían significar, simplemente, que era un número muy grande. También se les preguntó cuántos granos de arena había en Las Grutas y respondieron que lo mismo que la lluvia. Lo importante es que los niños se dieron cuenta que era *finito* y no *infinito.*
Un gran número es grande, pero es definido y es preciso.
Por supuesto que en poesía el finito termina alrededor de 3000, más que ello es infinito (....número infinito de estrellas). Para los Hotentotes (tribu del sur de África) el infinito comienza en 3, pues si tienen más de 3 vacas responderán que tienen muchas.
He aquí el nombre de un número muy grande: GOOGOL (nombre propuesto por un niño de 9 años), es un 1 seguido de cien ceros.

Pero antes, vamos a ver algunas situaciones en las que aparecen números muy grandes. ¿Te imaginas alguna cantidad que se pueda contar con Googols?

1. ¿Aproximadamente, qué edad tenés en segundos? Explica.
2. ¿Aproximadamente, qué fecha transcurría hace mil millones de segundos? Explica.
3. ¿Qué ocurrió aproximadamente hace un millón de días?

Para ahorrar tiempo al escribir y contar los ceros de las potencias de 10, puedes usar una notación especial, la *notación exponencial:* el 100.000 se puede escribir como 10^5 y el 10.000.000 como 10^7 . ¿Por qué piensas que las expresiones son equivalentes?

4. Escribe los siguientes números en notación exponencial: 1.000, 1.000.000.000, 10.

Escribe el resultado en notación exponencial: 10^4 x 10; 10^8 x 100 ; 10^{11} x 1.000.

Los números con bases distintas de 10 también se pueden escribir en notación exponencial.

5. ¿Aproximadamente, qué distancia caminarías si dieras 10^9 pasos? Explica cómo hallaste la respuesta.
6. ¿De qué altura es una pila de un millón de pesos en: a) billetes de 2 pesos; b) billetes de diez pesos; c) billetes de cien pesos?
7. ¿De qué altura es una pila de un millón de monedas de 25 centavos? Expresa esta cantidad de dinero de otra forma.
8. ¿Cuántas veces más grande es mil millones que un millón? (En Estados Unidos mil millones se denomina billón, pero para nosotros el billón es un millón de millón)

El googol es un número más grande que los mayores números usados habitualmente en física y astronomía.

Una publicación científica muy distinguida, apareció con la revelación de que el número de cristales de nieve necesarios para formar la edad de hielo era un billón a la billonésima potencia. Esto es muy espantoso, pero también muy simple: $1.000.000.000^{1.000.000.000}$

Una apreciación más razonable y un número más pequeño habría sido la siguiente: si el universo entero estuviese lleno de protones y electrones, de manera que no quedase espacio libre, el número total de protones y electrones sería 10^{110}, es decir un 1 seguido de 110 ceros (algo más que un googol...). Desgraciadamente, tan pronto la gente habla de números grandes, pierde la chaveta. ¿Cuánto más que un googol?

Si bien la gente comete el gran abuso de hablar demasiado, la producción total, desde el comienzo de la charla hasta la fecha, incluyendo toda el habla de los niños, los cantos de amor y los debates de congreso, totaliza aproximadamente 10^{16}, es decir diez millones de billones.¿Qué parte del googol?

El mayor número visto en las finanzas representa la cantidad de dinero en circulación en Alemania en el punto álgido de la inflación, eso es 496.583.346.000.000.000.000. ¿Cuántos googols?

El número de electrones que pasan a través del filamento de una lámpara eléctrica común, de 50 vatios, en el término de 1 minuto, iguala al número de gotas de agua que caen por las cataratas del Niágara en un siglo. ¿Podrías averiguar cuántos son?

El googolplex es un número aún mayor que el googol, formado de tantos ceros después de

la unidad igual a 1 googol. Nos podemos formar alguna idea de la magnitud de este número grandísimo, pero FINITO!
(Extraído y adaptado de Kanser E. y Newman.J.: *Matemática e Imaginación.* 1985. Editorial Hyspamérica).

A2) **Matemática y poesía**: Raymond Queneau usó en su obra literaria técnicas matemáticas. *Cien billones de sonetos* consta de diez sonetos escritos en diez páginas cortadas de modo que todos los versos se pueden combinar entre sí. Afirma que todos tiene sentido, pero nadie lo ha comprobado: se tardarían miles de años en leerlos (Sabadell M.: *Matemáticos: esos genios incomprendidos*. Rev. Muy Interesante. Año 21, nº 251, Septiembre 2006, pág.56)
¿Puedes justificar la última afirmación?

A3) **Una comida gratis**: Diez jóvenes estudiantes de la universidad se decidieron por un restaurante de tenedor libre para ir a almorzar todos los días. Una vez reunidos se entabló entre ellos una discusión sobre el orden en que habían de sentarse a la mesa. Unos propusieron que fuera por orden alfabético; otros, según la edad; otros, por los resultados de los exámenes, etc. La discusión se prolongaba, la sopa se enfrió y nadie se sentaba a la mesa. Los reconcilió el camarero, dirigiéndoles las siguientes palabras:

- Jóvenes amigos, dejen de discutir. Siéntense a la mesa en cualquier orden y escúchenme.

Todos se sentaron sin seguir un orden determinado. El camarero continuó:

-Que uno cualquiera anote el orden en que están sentados ahora. Mañana vienen a comer y se sientan en otro orden. Pasado mañana vienen de nuevo y se sientan en orden distinto, y así sucesivamente hasta que hayan probado todas las combinaciones posibles. Cuando llegue el día en que se vuelvan a sentar de la misma forma que hoy, a partir de ese día comerán gratis en el restaurante.

La proposición agradó a todos y fue aceptada. ¿Qué pasó?

Nota: En el siglo XVIII el matemático inglés Stirling estableció una fórmula que permite aproximadamente calcular los factoriales de un número entero n:

n! es aproximadamente $\sqrt{2.\pi.n}.\left(\frac{n}{e}\right)^{n}$

(Extraído de Perelman.Y: *Matemáticas Recreativas.* Editorial Mir.-Moscú. Ed. 1979. pág.132)

B) **NÚMEROS MUY CHICOS**

Dilución:
Muchos productos comunes del hogar deben diluirse antes de usarse. Por ejemplo, antes de lavar los platos diluyes el detergente. Antes de nadar en una piscina diluyes el cloro con agua. Antes de tomar una sopa concentrada la diluyes con leche o agua.

En esa actividad diluirás colorante de alimentos para ilustrar el proceso de dilución. Vacía 1 litro de colorante de alimentos en un envase y agrégale 9 litros de agua. Se formará una solución de 10 litros. Revuelve la solución.

l. ¿Qué porción de la solución es colorante de alimentos? ¿Qué porción es agua?

Vacía 1 litro de la solución en un envase medidor vacío. Agrega suficiente agua para completar 10 litros. Revuelve la solución.

2. ¿Qué porción de esta segunda solución es colorante de alimentos?

Vacía 1 litro de esta segunda solución en otro envase medidor vacío. Agrega suficiente agua para tener 10 litros de solución. Revuelve la solución.

3. ¿Qué porción de esta tercera solución es colorante de alimentos?

4. Supón que repitieras nuevamente este proceso. ¿Qué porción de la cuarta solución sería colorante de alimentos?

5. Completa la tabla para seis diluciones.

Número de diluciones	Porción de colorante
1	**0.1**
2	**0.01**
3	
4	
5	
6	

6. Supón que se extendiera la tabla hasta 20 diluciones. ¿Qué porción de la solución obtenida con 12 diluciones sería colorante de alimentos? ¿Y con 20 diluciones? (MIC: Potencias de Diez)

7. a. Supón que tienes una solución con 10^{-4} de colorante de alimentos.¿Cuántas diluciones se han hecho?

b. ¿Cuántas diluciones se han hecho si la solución tiene 10^{-6} de colorante de alimentos?

c. ¿Qué porción de la solución es colorante de alimentos si has hecho cinco diluciones?

d. Describe la relación que hay entre el número de diluciones y la porción de la dilución que es colorante de alimentos.

8. Piensa en diluir la séptima solución para preparar la octava solución. (Recuerda que cada dilución significa dividir por l0.)

a. ¿Qué porción de la séptima solución es colorante de alimentos?

b. ¿Qué porción de la octava solución es colorante de alimentos?

c. ¿Cuánto es 10^{-7} : 10 escrito como potencia de l0?

d. ¿Cuánto es 10^{-6} : l00 ? *(recordar:* Dividir por 100 son dos diluciones.)

(Extraído de la Colección Las matemáticas en contexto: *Potencias de diez. Ed. Británica.1999.* **)**

4) NOTACIÓN CIENTÍFICA

A) El sistema solar

El diámetro del Sol es de aproximadamente 1.392.000 kilómetros. La tabla de la izquierda muestra diferentes maneras de escribir este número.

El diámetro del Sol
1.392.000 x 1 = 1.392.000 x 10^0
139.200 x 10 = 139.200 x 10^1
13.920 x 100 = 13.920 x 10^2
....
....
13,92 x..............
1,392 x ....

1. Completa los números que faltan.
2. Frecuentemente, los libros científicos señalan la distancia de Júpiter al Sol como 7.78 x 10^8 kilómetros. ¿Es esta distancia lo mismo que 778.000.000 kilómetros? ¿Por qué?

A esta forma de escribir un número como el producto de un número del 1 al 10 Y una potencia de 10 se le llama ***notación científica***.

3. La distancia de la Tierra a la Luna es de aproximadamente 384.000 kilómetros. Escribe este número de tantas diferentes maneras como puedas. ¿Cuál de ellas corresponde a la notación científica?
4. Investiga los diámetros de los planetas del sistema solar y las distancias promedio de los planetas al Sol en base a sus órbitas. Expresa los números en **notación científica**.
5. ¿Cuál es el planeta más pequeño del sistema solar? ¿Y el más grande?

(Extraído de la Colección Las matemáticas en contexto: *Potencias de diez. Ed. Británica.1999*)

B) Buscar en un libro de biología células, glóbulos, etc. Encontrar, a través de la escala o del dibujo, cuáles son sus dimensiones y expresar sus medidas en notación científica.

5) FUNCIÓN EXPONENCIAL

De cada una de las siguientes funciones, analizar: dominio, imagen, continuidad, crecimiento, variables, comportamiento de los parámetros, desplazamientos.

A) **Campo de amapolas**

Una cabeza de amapola, en la fase final de su desarrollo, está repleta de minúsculas semillas, cada una de las cuales puede originar una nueva planta. ¿Cuántas amapolas se obtendrían si germinaran, sin excepción, todas las semillas? Para saberlo es preciso contar las semillas contenidas en una cabeza de amapola. Es una tarea larga y aburrida, pero el resultado obtenido es tan interesante, que merece la pena armarse de paciencia y hacer el recuento hasta el fin. La cabeza de una amapola tiene (redondeando) 3000 semillas.
¿Qué se deduce de esto? Que si el terreno que rodea a nuestra planta fuera suficiente y adecuado para el crecimiento de esta especie, cada semilla daría, al caer al suelo, un nuevo tallo, y el verano siguiente crecerían en ese sitio 3000 amapolas. ¡Un campo entero de amapolas de una sola cabeza! ¿Qué ocurriría después?.......
(Extraído de Perelman Y.: *Matemáticas Recreativas.* Editorial Mir.-Moscú. Ed. 1979. pág.125)

B) **"Las curvas copos de nieve"**

A partir de un triángulo equilátero se pueden hacer dos secuencias de curvas muy interesantes.....

Para generar la secuencia del copo de nieve, primero hay que dividir en tres partes iguales cada uno de sus lados, y construir otros triángulos equiláteros más pequeños en el tercio central de cada lado.

Cada nuevo elemento de la secuencia se crea construyendo nuevos triángulos equiláteros cada vez más pequeños, siempre en el tercio central de cada tramo recto de la última curva dibujada.

Las curvas anticopo de nieve se producen en forma análoga, pero poniendo hacia adentro las puntas de los triángulos que sustituyen al trozo central de cada lado."

- Si el perímetro del triángulo inicial tiene una longitud de 27 unidades. ¿Cuáles son los perímetros de las sucesivas curvas copo de nieve correspondientes? ¿Cuál será la longitud de la quinta curva en cada secuencia?
- La construcción de las curvas "copo de nieve" y de las "anticopo de nieve" constituyen un algoritmo. Si sabes informática ¿podrías elaborar el programa que permita construirlas en la computadora?
- La sucesión formada por los valores de los perímetros de cada curva obtenida responde a una ley de formación. Intenta encontrarla.
- Ídem al anterior respecto a las áreas.

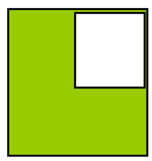
Observación: La posibilidad de continuar el proceso de iteración iniciado en este ejercicio, en forma infinita, dará idea de lo que los científicos hoy denominan "fractales". Margarita Marín Rodríguez los caracteriza como "el resultado final que se obtiene de la iteración infinita de un proceso geométrico bien especificado. Este proceso geométrico suele ser de naturaleza muy simple, mientras que el producto final es de una gran complejidad, de hecho, un fractal consta de fragmentos geométricos de orientación y tamaño variables, pero de aspecto similar, resaltando en él dos características: su dimensión fraccionaria y su autosimilitud".

(Extraído de Ana Bressan y otros: *Razones para enseñar geometría en la Educación Básica*. Novedades educativas. 2000)

C) ¿Cuál de los siguientes pares de números cuadrados se encuentran a una mayor distancia?

30^2 y 40^2	41^2 y 51^2
55^2 y 65^2	89^2 y 99^2

D) Construyamos un cuadrado de 1 dm de lado y lo cortamos como indica la figura:



Dejamos la parte sombreada sobre la mesa y nos quedamos con el recorte cuadrado en la mano. Cortamos el cuadrado pequeño en forma similar, dejando sobre la mesa la pieza en forma de L. ¿Hacía qué valor tienden las áreas de los cuadraditos que seguimos cortando y del área total de las pieza que van quedando sobre la mesa?
(Extraído de. Guzmán M. y otros. *Matemática.* Ed. Anaya. 1993).

E) **Muéstrame tu carbono y te diré de cuándo eres**
El parámetro que mide el ritmo de desintegración de un material radiactivo es la ***vida media:*** *el tiempo en que una cantidad cualquiera de ese material se reduce a la mitad. La vida media del radio 226 es de 1600 años. Si tenemos un gramo de Ra 226, al cabo de 1600 años nos quedará sólo 1/2 gramo, pasados otros 1600 años sólo 1/4, y si esperamos 1600 años más tendremos entre manos sólo 1/8 de nuestro gramo original.*

Cada elemento radiactivo tiene una vida media característica, de la cual seguro se siente orgulloso, y que puede ser muy variada: la del uranio es de 4500 millones de años, por ejemplo, y la del plutonio es de 70 millones de años. Este rasgo singular de los elementos radiactivos (reducirse a la mitad en períodos definidos de tiempo), ha tendido una mano inesperada a la historia, la arqueología y la antropología, proporcionándoles un método notable y eficaz de datación de acontecimientos: mediante el carbono 14 (un isótopo radiactivo del carbono) cuya vida media es de 5730 años.

El anhídrido carbónico de la atmósfera contiene una proporción constante de C14. Pero los seres vivos absorben anhídrido carbónico y, por lo tanto, también en los tejidos de toda *materia viviente aparece una concentración permanentemente renovada de C14, que se mantiene constante. Cuando el ser vivo en cuestión muere, su intercambio con la atmósfera cesa, y la concentración de C14 comienza a disminuir a medida que éste se desintegra sin reponerse. Se ha puesto en marcha el reloj radiactivo.*

Supongamos que se encuentran restos arqueológicos de un asentamiento humano primitivo, por ejemplo, cerámicas, utensilios, etc. y huesos humanos. Sabemos cual es la concentración de C14 que debería haber en los huesos pertenecientes a un ser vivo. Medimos la que hay en los huesos fósiles: si encontramos que es la mitad, quiere decir que la mitad del C14 se ha desintegrado y, en consecuencia, desde la triste muerte del propietario de los huesos en cuestión han pasado 5730 años. Si lo que encontramos es la cuarta parte, han transcurrido dos períodos, es decir 11460 años, y así sucesivamente. Por supuesto que cualquier valor intermedio también puede ser manejado mediante un sencillo cálculo. O sea que, allí donde haya restos de materia orgánica, los residuos de C14 delatan la fecha.
Difícilmente puede haber un sistema de datación más preciso, y ya ha sido utilizado para fechar acontecimientos históricos que se remontan hasta sesenta mil años atrás, y para establecer correspondencias entre fósiles que se pierden en la oscuridad del tiempo. https://www.muyinteresante.es/ciencia/articulo/el-carbono-la-base-de-la-vida-581463573586

a) Realizar una tabla de valores y escribir la fórmula correspondiente. Graficar la función C(n).