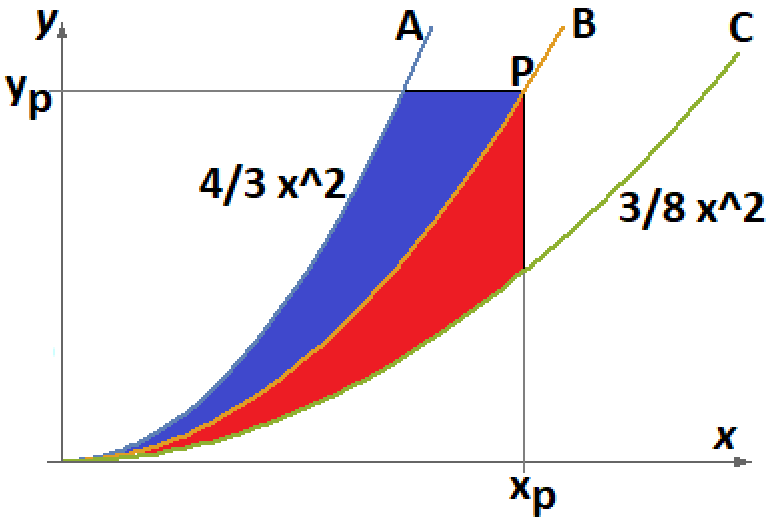
CURVA INTERMEDIA
UN PROBLEMA DIFÍCIL



Las curvas A, B y C están relacionadas en el sentido que la curva B biseca el área entre A y C; o sea que el área de la región roja es igual al área de la región azul para todos los puntos de la curva B.

Encontrar la ecuación de la curva B sabiendo que la ecuación de la curva A es "y = (4/3) x^2" y la ecuación de la curva C es "y = (3/8) x^2".

Debido a que tanto la curva A como la curva C son funciones cuadráticas, entonces la curva B debe ser una función cuadrática para que las regiones tengan siempre igual área. Además como y_B parte del origen no puede tener una constante. Tampoco un término lineal en x. O sea:

` $y_A = (4/3)\, x^2$

$y_B = a\, x^2$ donde a = ?

$y_C = (3/8)\, x^2$

Desconocemos cuánto valen x_p y y_p, pero como la igualdad de áreas debe cumplirse para cualquier x, podemos tomar un x_p arbitrario que vamos a suponer igual a 1 ($x_p = 1$). La igualdad de área impone que:

$$\boxed{\int_0^1 a\, x^2\, dx - \int_0^1 \frac{3}{8} x^2\, dx = \int_0^{y_p} \sqrt{\frac{y}{a}}\, dy - \int_0^{y_p} \sqrt{\frac{3\,y}{4}}\, dy}$$

A la izquierda se integra tomando a "x" como variable independiente. A la derecha tomando a "y" como variable independiente. Además tenemos que:

$y_p = a\, x_p = a$

ya que hemos impuesto que $x_p = 1$, por lo que.

$$\boxed{\int_0^1 a\,x^2\,dx - \int_0^1 \frac{3}{8}\,x^2\,dx = \int_0^a \sqrt{\frac{y}{a}}\,dy - \int_0^a \sqrt{\frac{3\,y}{4}}\,dy}$$

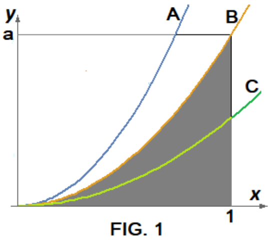


FIG. 1

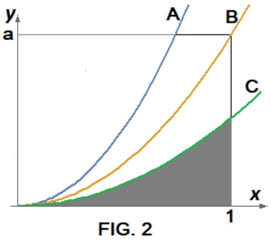


FIG. 2

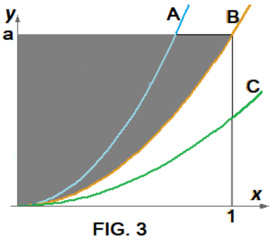


FIG. 3

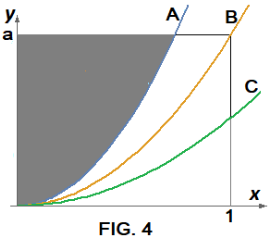


FIG. 4

Las figuras 1, 2, 3 y 4 corresponden a las superficies que se calculan respectivamente con las integrales de la fórmula anterior..

Realizamos la integral y obtenemos:

$a/3 - 1/8 = (2/3)\ a - a^{3/2} / \sqrt{3}$

Despejando "a" obtenemos que:

$a = 3/4$

$\therefore \quad y_B = (3/4)\ x^2$