Traducción para uso interno del Grupo Patagónico de Didáctica de la Matemática. Escuela de Otoño: "La corriente realista de didáctica de la matemática." 4 al 9 de mayo de 2009. San Carlos de Bariloche. Prov. de Río Negro. Argentina.

AUTOR: **PIERRE VAN HIELE**

TÍTULO: **DESARROLLANDO EL PENSAMIENTO *GEOMÉTRICO* A TRAVÉS DE ACTIVIDADES QUE COMIENZAN COMO UN JUEGO**

FUENTE: Teaching Children Mathematics 5(6): 310-16, February 1999 [1]

Para los niños la geometría comienza como un juego. A través de actividades lúdicas como mosaicos: bloques con un patrón o cerámicos con un diseño, puzzles como los tangrams o con los mosaicos de siete piezas que se muestran en la figura 1 se puede proveer instrucciones ricas y estimulantes. Los maestros podrían preguntar: "¿Cómo pueden los niños usar mosaicos y qué geometría aprenderían? Antes de abordar estas preguntas y explorar el potencial del rompecabezas mosaico para la enseñanza de la geometría, noto una mala comprensión en la enseñanza de la matemática y presento algunas de mis ideas acerca de los niveles de pensamiento en geometría.

FALSOS CONCEPTOS EN LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA

La enseñanza de la matemática (geometría y aritmética) en la escuela ha sido una fuente de muchos falsos conceptos. La geometría de la escuela secundaria estuvo por mucho tiempo basada en los axiomas geométricos que Euclides creó hace más de 2000 años. La construcción lógica de la geometría con sus axiomas, definiciones, teoremas y pruebas fue – para su tiempo – un admirable logro científico. La escuela de geometría que se presenta de una manera axiomática similar presupone que los alumnos tienen un pensamiento formal deductivo. No obstante, generalmente ese no es el caso y ellos no poseen los prerrequisitos necesarios para la comprensión de la geometría. Esta carencia crea una brecha entre el nivel de pensamiento de los alumnos y aquel requerido por la geometría que se espera que aprendan.

En la escuela primaria se puede notar unos falsos conceptos similares a estos en la enseñanza de la aritmética. De la misma manera que Euclides lo hizo en geometría, los matemáticos desarrollaron construcciones axiomáticas para la aritmética y éstas subsecuentemente afectaron la enseñanza de la matemática en las escuelas. En los años 1950, Piaget y yo tomamos una postura en contra de estos falsos conceptos. No obstante; esto no ayudó porque justo en ese momento la teoría de conjuntos fue establecida como el fundamento del concepto de número y la aritmética escolar basada en los conjuntos fue implementada en todo el mundo siendo comúnmente denominada "matemática moderna".

Por varios años, estos falsos conceptos dominaron la matemática escolar y el final llegó sólo después de que se comunicaran sus resultados negativos. El punto de vista de Piaget, que yo apoyo afectuosamente, era que "el no dar educación es mejor que darla en el momento equivocado". Debemos proveer una enseñanza que sea apropiada al nivel de pensamiento de los niños.

Traducción para uso interno del Grupo Patagónico de Didáctica de la Matemática. Escuela de Otoño: “La corriente realista de didáctica de la matemática.” 4 al 9 de mayo de 2009. San Carlos de Bariloche. Prov. de Río Negro. Argentina.

NIVELES DE PENSAMIENTO GEOMÉTRICO

¿En cuál nivel debería comenzar la enseñanza? La respuesta, por supuesto depende del nivel de pensamiento de los alumnos. Comienzo por explicar lo que quiero decir cuando hablo de niveles de pensamiento compartiendo una conversación que dos de mis hijas, de ocho y nueve años en ese momento, mantuvieron acerca del pensar. Su pregunta era: “¿Si estás despierto, entonces estás ocupado en pensar? “No”, concluyó una. “Yo puedo caminar por el bosque y ver los árboles y todas las otras cosas hermosas, pero yo no pienso que veo los árboles. Veo helechos, y los veo sin pensar qué son.” La otra dijo, “Entonces has estado pensando, o sabías que estabas en el bosque y que veías árboles, pero sólo que no usabas palabras.”

Yo juzgué esta controversia como importante y le pedí su opinión a Hans Freudenthal, un prominente matemático y educador holandés. Su conclusión fue clara: “Pensar sin palabras no es pensar.” En Estructura y Discernimiento (van Hiele 1986), yo expresé este punto de vista, y los psicólogos en los Estados Unidos no estuvieron muy contentos con él. Tenían razón: si el pensamiento no verbal no pertenece al pensamiento real, entonces aún cuando uno esté despierto, no piensas la mayor parte del tiempo.

El pensamiento no verbal es de especial importancia; todo el pensamiento racional tiene sus raíces en el pensamiento no verbal, y muchas decisiones se toman con sólo esa clase de pensamiento. Observamos cosas sin tener palabras para ellas. Reconocemos los rostros de personas familiares sin ser capaces de usar palabras para describir esos rostros. En mis niveles de pensamiento ***geométrico***, el más “bajo” es el **nivel visual**, que comienza con un pensamiento no verbal. En el nivel visual de pensamiento, las figuras son juzgadas por su apariencia. Decimos, “Es un cuadrado. Sé que lo es porque lo veo.” Los niños podrían decir, “Es un rectángulo porque parece una caja.”

En el nivel siguiente, el **nivel descriptivo**, las figuras son portadoras de sus propiedades. Una figura ya no es juzgada porque “parece una figura” sino mayormente porque tiene ciertas propiedades. Por ejemplo, un triángulo equilátero; tiene determinadas propiedades como tres lados - todos iguales-, tres ángulos iguales, y simetría con respecto a una línea y con respecto a un eje de rotación. En este nivel el lenguaje es importante para describir las formas. De todas maneras, en este **nivel descriptivo**, las propiedades todavía no están lógicamente ordenadas, entonces un triángulo con lados iguales no es necesariamente uno con ángulos iguales.

En el siguiente nivel, el **nivel de deducción no formal**, las propiedades están lógicamente ordenadas. Son deducidas una de la otra; una propiedad precede o sigue a otra propiedad. Los alumnos usan las propiedades que ellos ya conocen para formular definiciones, por ejemplo, para los cuadrados, rectángulos y los triángulos equiláteros, y las usan para justificar relaciones, como la explicación de por qué todos los cuadrados son rectángulos y por qué la suma de los ángulos de cualquier triángulo deber ser 180º. No obstante, en este nivel, el significado intrínseco de la deducción, esto es, el rol de los axiomas, definiciones, teoremas y sus recíprocos, no es comprendido. Mi experiencia como profesor de geometría me convence que, con demasiada frecuencia, los alumnos no han logrado todavía su nivel de deducción informal. En consecuencia, no tienen éxito en su estudio de este tipo de geometría creada por Euclides, que involucra las deducciones formales. (Ver van Hiele (1977) y Fuys, Geddes y Tischler (1988) para más información acerca de estos niveles).

Traducción para uso interno del Grupo Patagónico de Didáctica de la Matemática. Escuela de Otoño: "La corriente realista de didáctica de la matemática." 4 al 9 de mayo de 2009. San Carlos de Bariloche. Prov. de Río Negro. Argentina.

¿Cómo desarrollan los alumnos este tipo de pensamiento? Creo que este desarrollo depende más de la instrucción que de la edad o la maduración biológica y este tipo de experiencias de instrucción pueden promover o impedir el desarrollo. Como discuto al final de este artículo, la instrucción que intenta promover el avance de un nivel determinado al siguiente incluye secuencias de actividades que comienzan con una fase exploratoria, que va construyendo gradualmente conceptos y el lenguaje que se relaciona con ellos. Culmina en actividades que resumen este proceso y que ayudan a los alumnos a integrar lo aprendido a lo que ya saben.

Las siguientes actividades ilustran este tipo de secuencia para desarrollar el pensamiento en el nivel visual y para sustentar una transición al nivel descriptivo.

COMENZANDO LA GEOMETRÍA Y EL ROMPECABEZAS MOSAICO

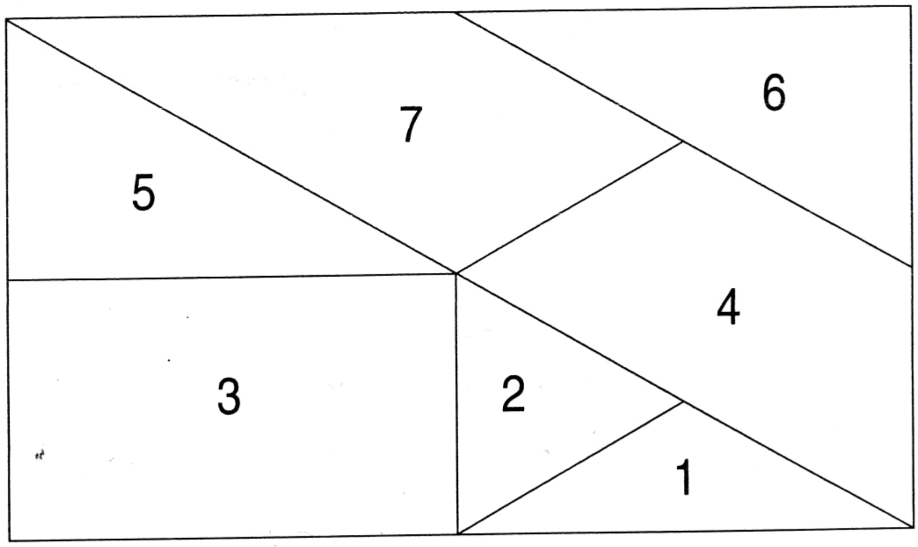
Únanse a mí ahora para utilizar el mosaico de siete piezas (ver fig.1) en exploraciones de juego que tienen que ver con ciertas figuras y sus propiedades, simetría, paralelismo y área. Antes de seguir leyendo, por favor hagan su propio conjunto de piezas para usar en las actividades, que pueden ser adaptadas para niños, dependiendo de experiencias ***geométricas*** previas. La figura 1 puede ser reproducida en cartón para hacer los conjuntos más durables para ustedes y sus alumnos. Las piezas están numeradas en su parte superior para referirse a ellas en instrucciones y discusiones de las actividades.

Imaginen que el rectángulo grande en la figura 1 se ha dividido en siete piezas: un triángulo isósceles (pieza 1); un triángulo equilátero (pieza 2); dos triángulos rectángulos (piezas 5 y 6), y tres cuadriláteros: un rectángulo (pieza3); un trapezoide (pieza 7) y un trapecio isósceles (pieza 4).

La figura 2 muestra como el rectángulo grande y sus piezas se pueden ubicar en una grilla de triángulos equiláteros.

FIGURE 1

The seven-piece mosaic puzzle—create a set of pieces to use as you read this article.



Traducción para uso interno del Grupo Patagónico de Didáctica de la Matemática. Escuela de Otoño: "La corriente realista de didáctica de la matemática." 4 al 9 de mayo de 2009. San Carlos de Bariloche. Prov. de Río Negro. Argentina.

Comenzamos por preguntar ¿Qué se puede hacer con estas piezas? Los alumnos responden a esta pregunta abierta usando su imaginación y jugando con las piezas para crear lo que sea que deseen – algunas veces objetos del mundo real como una persona (figura 3) o una casa (figura 4); algunas veces otras figuras, como la pieza 3, o diseños abstractos. Los chicos deberían tener oportunidades suficientes para realizar un juego libre y para compartir sus creaciones. Este tipo de juego da a los maestros la posibilidad de observar cómo los chicos usan las piezas y para evaluar informalmente cómo piensan y hablan acerca de las figuras.

FIGURE 3

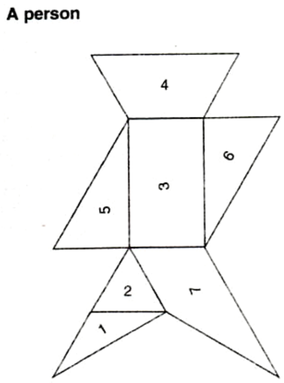
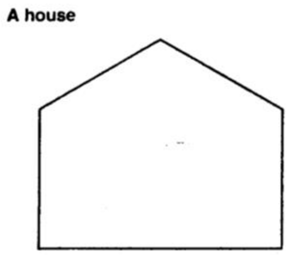
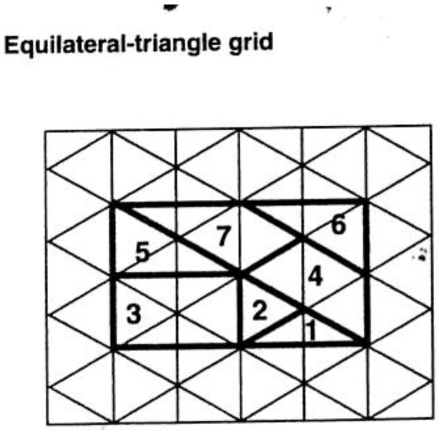


FIGURE 4



En el juego libre los chicos pueden haber unido dos piezas para hacer otra, por ejemplo, usando la pieza 5 y 6 hacer la pieza 3. Podemos pedirles que encuentren todas las piezas que puedan hacerse de otras dos. Sólo no se puede hacer esto con las piezas 1 y 2. Prueben esta actividad y luego encuentren la pieza que pueda ser hecha con otras tres. Los chicos pueden ubicar las piezas directamente sobre la pieza que quieren construir o formarla al lado de la pieza original para una visión comparativa más fácil. Para registrar sus soluciones, los chicos deberían trazar el contorno de una pieza y luego dibujar cómo la hicieron utilizando las otras piezas o mostrar su método con marcadores sobre una grilla triangular.

FIGURE 2



Traducción para uso interno del Grupo Patagónico de Didáctica de la Matemática. Escuela de Otoño: "La corriente realista de didáctica de la matemática." 4 al 9 de mayo de 2009. San Carlos de Bariloche. Prov. de Río Negro. Argentina.

Esta actividad guía a los niños a notar que, uniendo dos pedazos, algunas veces hacemos una figura que es diferente de todas las piezas originales. Pueden investigar cuántos tipos distintos de figuras pueden ser construidas con un par de piezas, uniéndolas por los lados que concuerden. Con las piezas 5 y 6 hay seis formas posibles y sólo una de ellas es la misma que la pieza original. Realicen estas combinaciones y después prueben la misma actividad con las piezas 1 y 2.

Se pueden introducir nuevas formas con rompecabezas que requieren dos o más piezas. La forma en la figura 5 puede ser hecha de dos maneras. Una utiliza las piezas 2 y 4 dadas vueltas con el lado que tiene el número hacia arriba y otra con las piezas 2 y 4 dadas vueltas (con el número hacia abajo). Hagan la figura de las dos maneras. ¿Puede ser hecha con las piezas 1 y 7? ¿Y con las piezas 1 y 7 dadas vueltas? ¿Qué otras piezas pueden formar esta figura? ¿Y formarla también cuando se las da vuelta?

Haciendo la figura de diferentes maneras con dos piezas puede inspirar a los chicos a preguntar: "¿Podemos hacerla con tres piezas también?" Prueben las piezas 1, 2 y 5 y luego háganla de una manera distinta con estas tres piezas. También prueben las piezas 1, 2 y 5 dadas vueltas.

En la resolución de rompecabezas como estos, los chicos trabajan visualmente con ángulos y lados que tienen las mismas medidas. También ellos pueden notar que algunas piezas concuerdan con otras con cualquier lado hacia arriba y otras no. Las piezas 2 y 3 concuerdan con cualquiera usando anverso o reverso de la pieza; la pieza 7 no, ya que al ponerla boca abajo cambia su orientación y cómo se la ve. ¿La pieza 1 puede colocarse boca abajo? ¿Y las piezas 4, 5 y 6?

LAS TARJETAS CON PUZZLES Y EL ROMPECABEZAS MOSAICO

A continuación, presento ***problemas*** más complejos. Las instrucciones pueden ser dadas de manera oral o con tarjetas de trabajo, como las de la figura 6. Léanlas y pruébenlas. Ilustran como los "puzzles" que son creados con dos piezas pueden tener soluciones que utilizan otras piezas. Piensen qué geometría involucran y las conversaciones que los chicos pueden tener mientras las hacen.

TARJETAS DE TRABAJO

PUZZLE DE UNA CASA

1. En un pedazo de papel, hacer una casa como ésta con dos piezas
2. Realizar un trazado alrededor de la casa que hicieron para formar una sola figura
3. Hacer la forma con otras dos piezas
4. Hacer la forma con tres piezas. ¿Pueden encontrar dos formas de hacerlo?
5. ¿Puede ser hecha con cuatro piezas?

PUZZLE DE UNA CASA ALTA

1. En un pedazo de papel, hacer una casa alta con la pieza 2 como techo y una pieza más.
2. Marcar el contorno de la pieza realizada.

Traducción para uso interno del Grupo Patagónico de Didáctica de la Matemática. Escuela de Otoño: "La corriente realista de didáctica de la matemática." 4 al 9 de mayo de 2009. San Carlos de Bariloche. Prov. de Río Negro. Argentina.

3. Hacer la figura con las piezas 5 y 7.
4. ¿Puede ser hecha con tres piezas?

HACER UN PUZZLE

1. Utilizar dos, tres o cuatro piezas cualesquiera. Hacer una forma. Marcar el contorno en una tarjeta grande. Colorearla
2. ¿Se puede hacer esta misma forma con otras piezas?
3. Escribe tu nombre y un título para tu figura en la tarjeta grande.

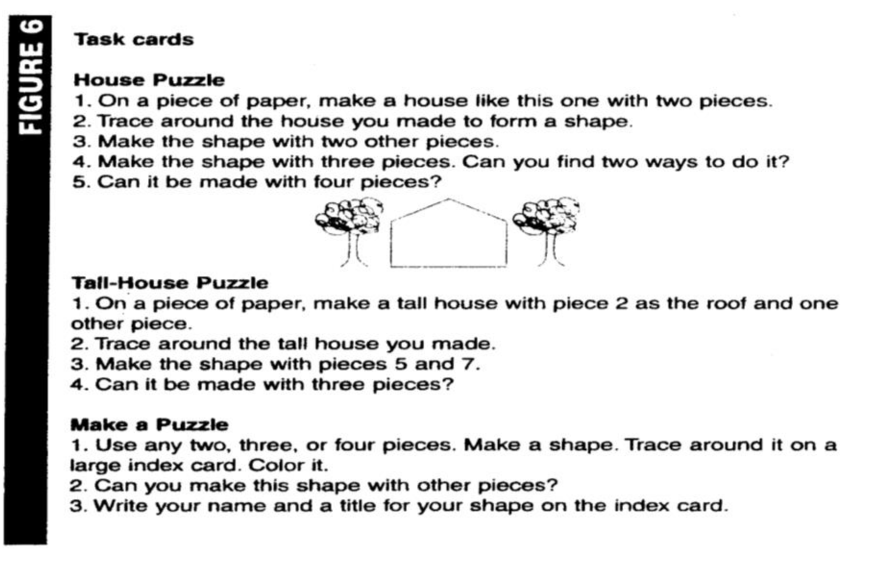


FIGURE 6

Task cards

House Puzzle
1. On a piece of paper, make a house like this one with two pieces.
2. Trace around the house you made to form a shape.
3. Make the shape with two other pieces.
4. Make the shape with three pieces. Can you find two ways to do it?
5. Can it be made with four pieces?

Tall-House Puzzle
1. On a piece of paper, make a tall house with piece 2 as the roof and one other piece.
2. Trace around the tall house you made.
3. Make the shape with pieces 5 and 7.
4. Can it be made with three pieces?

Make a Puzzle
1. Use any two, three, or four pieces. Make a shape. Trace around it on a large index card. Color it.
2. Can you make this shape with other pieces?
3. Write your name and a title for your shape on the index card.

Algunos alumnos usan estrategias para resolver estos puzzles. Por ejemplo, en la parte 4 de los dos puzzles de una casa, los chicos que saben que la pieza rectangular 3 puede ser construida con las piezas 5 y 6, pueden usar esta relación para idear una solución colocando las piezas 1 y 2 sobre las piezas 5 y 6 en el espacio rectangular en la parte de abajo. Es importante para los chicos compartir su enfoque con sus compañeros, quizás utilizando un retroproyector para "mostrar y contar". Los maestros también deberían fomentar la formulación de problemas. Los chicos disfrutan de crear puzzles para que otros resuelvan. Los puzzles pueden ser presentados como formas recortadas o pueden ser dibujados en tarjetas y presentados en un rincón matemático. Los alumnos pueden rotular los puzzles con sus nombres – por ejemplo, "*Puzzle de la casa grande" por Dina* – lo cual crea un sentido de pertenencia con sus creaciones.

Se pueden ampliar las piezas; por ejemplo, las piezas 2 y 4 pueden ser una ampliación de la pieza 2. Prueben esta ampliación, luego háganlo con otras dos piezas y luego con tres. La pieza ampliada tiene lados que son el doble de los lados de la pieza 2, la cual podemos ver si colocamos las piezas sobre una grilla triangular (ver fig. 7). Usando las piezas 2, 4, 5 y 7 hacer una pieza ampliada con lados tres veces mayores que los de la pieza 2. Encontrar 4 piezas que funcionen.

Desafío: Hacer una ampliación con las 7 piezas. Comparando los lados y los ángulos de estos triángulos con los de la pieza 2, podemos ver que los lados se vuelven progresivamente más largos, mientras que los ángulos permanecen iguales.

Traducción para uso interno del Grupo Patagónico de Didáctica de la Matemática. Escuela de Otoño: "La corriente realista de didáctica de la matemática." 4 al 9 de mayo de 2009. San Carlos de Bariloche. Prov. de Río Negro. Argentina.

EXPLORANDO LAS FORMAS Y ÁNGULOS GEOMÉTRICOS

Los chicos pronto notan que los lados de la pieza 2 tienen el mismo largo, y lo mismo para los lados de cada ampliación. Entonces en este punto, podemos dar un nombre para estas figuras – triángulo equilátero – y preguntar a los alumnos por qué el nombre es apropiado, esto es, tiene lados iguales.

Con este comienzo, podemos apreciar las ventajas que tiene este enfoque para enseñar geometría. Primero los chicos se involucran en actividades de las cuáles disfrutan porque son un juego. Tienen ***puzzles*** para resolver y aprenden cosas sin la intención de aprender. En los momentos adecuados, los maestros pueden introducir los nombres de las piezas. Luego de un tiempo, los chicos mismos van a usar esos nombres y van a aprender que ese nombre permanece igual, no importa de qué manera se coloque la pieza. Ellos también comienzan a notar ciertas características de las diferentes piezas. Por ejemplo, la pieza 2 tiene lados iguales; sus *rincones* son los mismos – son ángulos iguales -; y se ve igual cuando se la coloca con la cara superior hacia abajo – exhibe una línea de simetría – o si se la gira – exhibe una simetría de rotación. Los chicos pueden aprender acerca de otras piezas de una manera similar.

Luego, el nombre rectángulo es dado a la pieza 3. Se les dice a los chicos que las tres formas de la figura 8 son rectángulos, también, y se les pide que las construyan. Hagan que los alumnos construyan un rectángulo "alto" con las piezas 1, 5, 6 y 7 y el rectángulo en una posición "torcida" con las piezas 1 y 7 y los lados dados vuelta de las piezas 5 y 6.

¿Se pueden hacer otros rectángulos? Por supuesto, el más grande es el rectángulo grande de la figura 1. Es un desafío para los alumnos el reconstruirlo sin ver el diseño completo. Los chicos pueden arreglar las piezas de diferentes maneras, y ellos disfrutan al encontrar estas nuevas maneras. Haciendo varios rectángulos, los chicos descubrirán – luego de un tiempo – que todos los rectángulos no son ampliaciones de otros, como lo fue en el caso de los triángulos equiláteros. También, en contraste con los triángulos equiláteros, el rectángulo es una forma común de todos los días, y se deberá pedir a los alumnos que busquen y compartan ejemplos de esta figura en el ambiente de su hogar y escuela.

Luego de estudiar los rectángulos, los chicos pueden investigar las piezas 5 y 6, que forman la pieza 3. Estas figuras son triángulos rectángulos, o "triángulos rectangulares" como los llamamos en Holanda. Se les puede pedir a los chicos que construyan otros triángulos rectángulos – por ejemplo, probar con las piezas 1, 2, 5, 6; ó 3, 5 y 6 – y que verifiquen si son ampliaciones de la pieza 5.

Los chicos pueden también utilizar juegos que atraigan su atención hacia figuras y sus partes. Ellos también podrían "tocar y encontrar la figura", tocando una pieza sin verla y tratando de encontrar la que hace juego con ella. El preguntar "¿cómo sabías?" estimula la comunicación descriptiva de las piezas. Como: "Tiene cuatro lados y un rincón en punta" para la pieza 7.

Ubicando las piezas en los rompecabezas ayuda a los chicos a ser conscientes de las características de los lados y ángulos de las piezas. Algunas piezas tienen "rincones cuadrados", otras tienen rincones "en punta y filosos". Algunas tienen dos lados iguales, mientras otras tienen todos los lados iguales o ningún lado igual. El lenguaje de "lados" y "ángulos" puede ser introducido en este momento; pero, por supuesto, no con una definición formal. Los alumnos pueden comparar piezas iguales y mostrar en qué se asemejan – por ejemplo: tres lados, tres

Traducción para uso interno del Grupo Patagónico de Didáctica de la Matemática. Escuela de Otoño: "La corriente realista de didáctica de la matemática." 4 al 9 de mayo de 2009. San Carlos de Bariloche. Prov. de Río Negro. Argentina.

ángulos – o en que se diferencian – por ejemplo: todos los lados iguales, dos lados iguales, ningún lado igual, tres ángulos iguales.

La pieza 1 tiene dos ángulos iguales. ¿Qué otra pieza tiene esta propiedad? Colocar los ángulos unos sobre otros para ver si son iguales ayuda a los chicos a comprender que el tamaño del ángulo no depende del largo de sus lados.

Los ángulos de las piezas del rompecabezas vienen en cinco tamaños. El pedir a los alumnos que comparen las piezas que tienen un "rincón cuadrado", o ángulo recto, conduce al trabajo informal con ángulos agudos – los que son menores que un ángulo recto – y con ángulos obtusos – aquellos que son mayores que un ángulo recto.

La construcción del lenguaje que los chicos inventan para esta clase de ángulos ayuda a los maestros a introducir gradualmente los términos convencionales. Los chicos pueden encontrar las relaciones entre los ángulos de las diferentes piezas. Por ejemplo: como se relaciona el ángulo más chico con los otros ángulos (ellos son iguales a dos, tres, cuatro y cinco de los más pequeños). Estas actividades son realizadas sin hacer referencia a la medida de los ángulos y construyen un fundamento para un trabajo posterior con ángulos, sus medidas en grados y las relaciones entre los ángulos.

Una actividad interesante para los alumnos que saben acerca de la medida de los ángulos es calcular la medida de los ángulos en cada una de las siete piezas sin usar un transportador. Se puede hacer de muchas maneras y los chicos pueden comparar sus enfoques. Examinen las piezas en la figura 1 y encuentren las medidas de los ángulos de cada pieza. Piensen acerca de las relaciones entre los ángulos que son usados y si podrían calcular estas medidas de otras maneras usando otras relaciones entre los ángulos.

Los chicos que usan la grilla triangular para registrar soluciones a los ***puzzles*** se hacen conscientes de la igualdad de los ángulos en la grilla y también de las líneas paralelas. Se les puede pedir que busquen líneas como si fueran rieles de trenes y dibujar sus contornos con marcadores de diferentes colores, creando diseños que muestren tres juegos de líneas paralelas. El paralelismo de las líneas es una característica necesaria para la descripción de las piezas 4 y 7 – trapezoides que tiene un par de lados paralelos – y también se aplica a los lados opuestos de la pieza 3: un rectángulo.

OTRAS ACTIVIDADES CON LAS PIEZAS DEL ROMPECABEZAS MOSAICO

El colocar las piezas para llenar el espacio en los ***puzzles*** también provee experiencias en esta área. Por comparación directa, los alumnos pueden mostrar que algunas piezas ocupan más espacio que otras – la pieza 7 tiene un área mayor que la pieza 2 – o pueden descubrir relaciones, como: la pieza 5 es la mitad de la pieza 3. Trabajando con figuras sobre la grilla triangular revela otras relaciones, como, por ejemplo: la pieza 4 tiene 3 veces el área de la pieza 2, o cómo el área de la pieza 3 se compara con el área de sus ampliaciones (ver figura 7).

Traducción para uso interno del Grupo Patagónico de Didáctica de la Matemática. Escuela de Otoño: "La corriente realista de didáctica de la matemática." 4 al 9 de mayo de 2009. San Carlos de Bariloche. Prov. de Río Negro. Argentina.

FIGURE 7

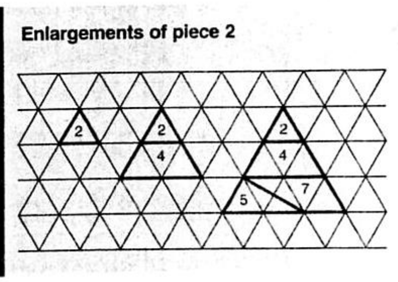
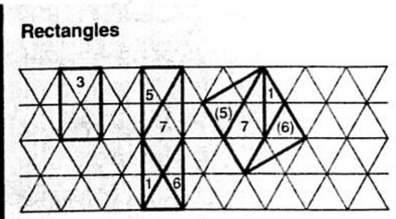


FIGURE 8



Se puede hacer una exploración similar del área con la pieza 4 y sus ampliaciones. Estas clases de experiencias con el área crean un fundamento para un trabajo posterior con unidades de área (cuadradas) y el descubrimiento de maneras para encontrar el área de distintas figuras. Por ejemplo: ¿por qué el área de un triángulo rectángulo es la mitad del área de un rectángulo y cómo las ampliaciones de una figura formada con el doble del largo de sus lados, afecta su área?

Para desarrollar el pensamiento descriptivo de los chicos acerca de las piezas, pueden jugar juegos con "pistas" de las piezas o las figuras con las cuales las hicieron. Algunas pistas para la pieza 4 podrían ser: "cuatro lados, cuatro ángulos, dos lados iguales, dos ángulos agudos iguales y dos líneas paralelas." Las pistas son reveladas una por vez hasta que se identifique la pieza. Luego de cada pista, los chicos dicen cuáles piezas funcionan o no y explican por qué.

También podrían jugar al juego de "adivinar la pieza", en el cual le hacen a la maestra preguntas que se puedan responder con "sí" o "no" acerca de la pieza misteriosa. El docente puede hacer una lista de preguntas en el pizarrón y hacer que los alumnos discutan si todas son necesarias para identificar la pieza. Los chicos pueden señalar que algunas propiedades implican otras, como "tres lados" significan que la pieza tiene "tres ángulos". Esta clase de juegos son útiles para practicar las propiedades que los chicos hayan aprendido hasta el momento y reforzar el uso del lenguaje descriptivo en los niños como una manera de razonar acerca de las piezas y sus propiedades. También dan a los maestros una ventana hacia los niveles de pensamiento de los chicos, en este caso entre el nivel descriptivo y el nivel siguiente en el cual las propiedades son ordenadas de manera lógica.

El haber jugado con este mosaico especial en estas actividades nos conduce a percibir que muchas otras preguntas a realizar y temas que explorar son posibles. Aún más, también se pueden utilizar grillas y mosaicos basados en otro tipo de figuras, como uno basado en cuadrados, que conduzca de una manera natural al área y a la geometría de coordenadas, que conectan la forma y el número.

REFLEXIONES ACERCA DE LAS ACTIVIDADES Y MIRANDO HACIA ADELANTE

Traducción para uso interno del Grupo Patagónico de Didáctica de la Matemática. Escuela de Otoño: "La corriente realista de didáctica de la matemática." 4 al 9 de mayo de 2009. San Carlos de Bariloche. Prov. de Río Negro. Argentina.

Las actividades con rompecabezas mosaicos y otras en las que se doble papel, el dibujo y los patrones con bloques pueden enriquecer el bagaje de estructuras visuales de los chicos. También desarrollan un conocimiento de las figuras y sus propiedades.

La enseñanza debería seguir una **fase de cinco secuencias de actividades** para promover la transición de un nivel al siguiente.

La enseñanza debería comenzar con una **fase indagatoria** en la cual los materiales conduzcan a los chicos a explorar y descubrir ciertas estructuras.

En la segunda fase, de **orientación directa**, se presentan tareas de tal manera que las estructuras características aparezcan de manera gradual para los chicos, por ejemplo, a través de ***puzzles*** que revelen la simetría de las piezas o través de juegos como "toquen y encuentren la figura".

En la tercera fase, de explicitación, el docente introduce la terminología y estimula a los chicos a usarla en sus conversaciones y el trabajo escrito de geometría.

En una cuarta fase, de orientación libre, el docente presenta tareas que puedan ser completadas de modos diferentes y que capaciten a los chicos para profundizar lo que ya saben, por ejemplo: a través de la exploración de la construcción de figuras diferentes con varias piezas o la realización de juegos con pistas.

En la quinta (la última fase), **de integración,** se les da a los chicos la oportunidad de sintetizar todo lo que aprendieron, quizás a través de la creación de sus propias actividades con pistas.

Durante estas fases el docente tiene varios roles:

- Planificar las tareas
- Dirigir la atención de los alumnos hacia las cualidades geométricas de las figuras
- Introducir la terminología e involucrar a los chicos en discusiones utilizando estos términos
- Estimular el uso de explicaciones y enfoques para la solución de problemas en los cuales los chicos hagan uso del pensamiento descriptivo de las figuras que ya tienen

El pasar repetidas veces por estas fases con materiales como el ***puzzle*** mosaico, permite a los chicos construir una base rica en pensamiento visual y descriptivo que involucra varias figuras y sus propiedades.

Recuerden: la geometría comienza con el juego. Tengan a mano materiales como el mosaico de siete piezas. Jueguen con ellos ustedes mismos. Reflexionen acerca de los temas de geometría que incluyen y cómo secuenciar las actividades para desarrollar los niveles de pensamiento de los chicos en estos temas. Luego involucren a sus alumnos en juegos y actividades que ofrezcan un aprendizaje en el pensamiento ***geométrico***. Los alumnos cuyo pensamiento ***geométrico*** es nutrido cuidadosamente están en mejores condiciones de estudiar exitosamente la clase de matemática creada por Euclides.

MATERIAL AGREGADO

Traducción para uso interno del Grupo Patagónico de Didáctica de la Matemática. Escuela de Otoño: "La corriente realista de didáctica de la matemática." 4 al 9 de mayo de 2009. San Carlos de Bariloche. Prov. de Río Negro. Argentina.

Pierre M van Hiele, residente de los Países Bajos toda su vida, es un ex maestro de Montessori y el autor de una serie de currículos que conduce una rica ordenación de las actividades de geometría. Él también es reconocido por su trabajo en niveles de pensamiento que se relacionan con la geometría y los presenta en este artículo.

Durante una visita a la Universidad de Brooklyn, van Hiele fue introducido en el uso de este ***puzzle*** mosaico. Desde ese entonces ha estado fascinado con él y las diversas maneras en que puede ser utilizado para el estudio de la geometría.

Aunque ha dado conferencias acerca del ***puzzle*** mosaico, éste es el único artículo en el cuál discute las maneras de usarlo para la enseñanza de los conceptos ***geométricos.***

Éste es el primer artículo publicado por van Hiele en un periódico del Consejo Nacional de Profesores de Matemática. Por esta razón el Panel Editorial de la Enseñanza de Matemática a los Niños está especialmente agradecido que este artículo haya aparecido en su publicación (1999) Publicación de un Enfoque de la Geometría y el Pensamiento Geométrico. El Panel también desea reconocer el trabajo de nuestro colega David Fuys, quien ayudó a van Hiele a preparar la copia final de su manuscrito – y a Charles Geer, de parte del Panel editorial.

REFERENCIAS

- Fuys, David; Geddes Dorothy y Tischler Rosamond, *El modelo de Pensamiento Geométrico de van Hiel entre los Adolescentes,* Publicación para la serie de monografías educacionales para Investigación de la Matemática, número 3. Reston, Va: Consejo Nacional de Profesores de Matemática, 1988.
- van Hiele, Pierre M: *Estructura y Discernimiento*: Orlando, Florida: Prensa Académica, 1986.
- van Hiele, Pierre M: *Estructure* (estructura). Zutphen, Países Bajos: Thieme, 1997.