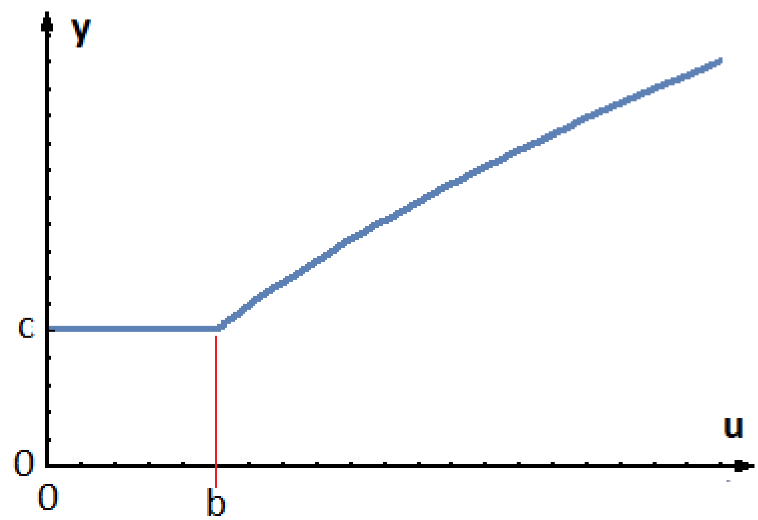
UNA FUNCIÓN CON RADICALES

Oscar Bressan

Sea la función:

$$y(u) = \sqrt{u} + \sqrt{25 + u - 10\sqrt{u}}$$

cuya gráfica es la siguiente:



Intente justificar:

a) ¿Por qué la función y(u) tiene un valor constante igual a "c" desde u = 0 hasta u = b?
b) ¿Cuál es el valor de b y cuál el de c?
c) ¿Por qué para u > b la función comienza a crecer?

SOLUCIÓN:

Observamos que y(u) es la suma de dos funciones, una es $\sqrt{u}$ y la otra es $\sqrt{25 + u - 10\sqrt{u}}$. Para que la suma sea igual a "c" desde u = 0 hasta u = b debe cumplirse que para todo u ≤ b

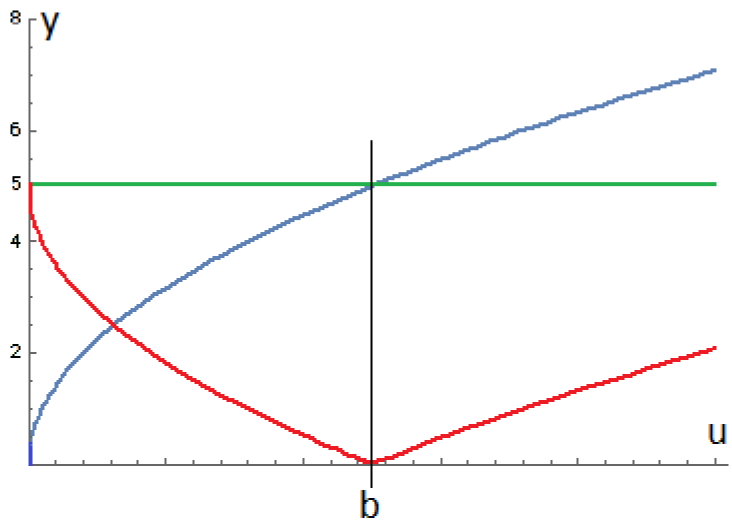
I) $c - \sqrt{u} \equiv \sqrt{25 + u - 10\sqrt{u}}$

donde ≡ significa idénticamente igual. Para evitar la raíz del segundo miembro elevamos todo al cuadrado:

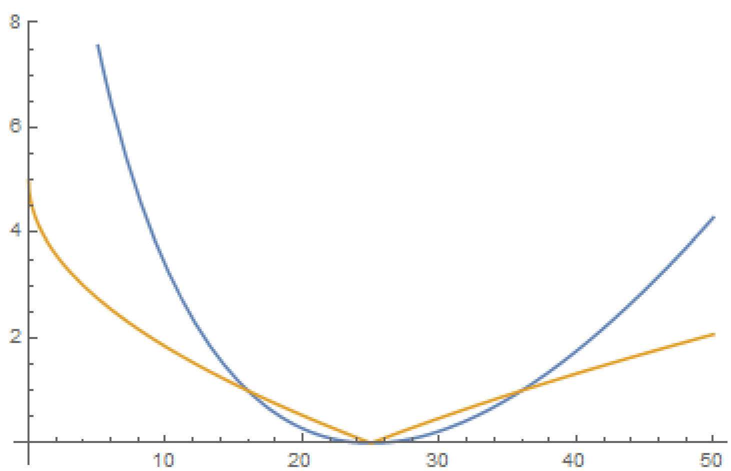
II) $c^2 - 2c\sqrt{u} + u \equiv 25 - 10\sqrt{u} + u$

y vemos que si c = 5 esto se satisface. Ya tenemos la respuesta porque dentro de un dominio ($0 \leq u \leq b$) la suma de las funciones es una constante. También responde cual es el valor de "c".

Para determinar cuánto vale "b" y responder a la pregunta c) graficamos
$\sqrt{u}$ y $\sqrt{25 + u - 10\sqrt{u}}$:



La curva azul es $\sqrt{u}$, la curva roja es $\sqrt{25 + u - 10\sqrt{u}}$ y la recta verde es y = 5. Vemos que en el intervalo $0 \leq u \leq b$ la curva azul y la roja se complementan para que su suma sea una constante, ya que mientras una crece la otra decrece. Pero para u > b ambas crecen. ¿Por qué la curva roja tiene tan extraño comportamiento? Para estudiarla la graficamos junto con la misma curva elevada al cuadrado:



y ahora entendemos porque decrece desde u =0 hasta u = 25, que es la solución de:

$$25 - 10\sqrt{u} + u = 0$$

para volver a crecer para u mayores que 25.

Acotación: Desde el Análisis: y(u) es una función continua, monótona creciente, con dominio

$0 \leq u < \infty$, con rango $5 \leq y < \infty$, derivable en todo punto excepto en u = 25.