FUNCIONES PERIÓDICAS

Adriana Rabino

Introducción

El hombre procuró siempre comprender los fenómenos naturales y sociales que observaba, con el objeto de aprovecharlos para su propio beneficio. Y en este camino buscó regularidades, comportamientos que se repitieran y le permitieran hacer predicciones sobre lo que habría de ocurrir. Descubrió así gran cantidad de procesos que se repetían cíclicamente: los latidos del corazón, la respiración, el día y la noche, las estaciones, las fases lunares, los ciclos menstruales, etc. Cuando alguno de estos procesos podía ser cuantificado y representado por medio de una función que vinculara dos variables numéricas, el resultado era una función cuyo comportamiento se repetía periódicamente.
Las funciones periódicas son, entonces, el medio para estudiar gran cantidad de fenómenos naturales. Pero... ¡la condición de periodicidad es tan general! ¡La variedad de funciones periódicas es enorme! Sin embargo, como ya mostró Joseph Fourier a comienzos del siglo XIX, asombrando a sus contemporáneos, una función periódica puede ser *aproximada* mediante sumas de funciones periódicas sencillas de sólo *dos tipos.* ¿Cuáles son esas funciones periódicas sencillas? Ni más ni menos que las tan conocidas funciones trigonométricas (seno y coseno), extensamente estudiadas ya por los antiguos griegos.

Generalmente, en la educación secundaria el concepto de trigonometría se ve en dos instancias bien diferenciadas. La primera de ellas, como relaciones de los lados de un triángulo rectángulo con un carácter netamente instrumental para resolver situaciones problemáticas de triángulos rectángulos que involucran lados y ángulos en los datos.

El otro enfoque (que es el que trataremos en esta secuencia) es hacia las funciones trigonométricas como casos particulares de funciones periódicas. La trigonometría es uno de los temas que tiene más aplicación directa en problemas concretos, y una de las herramientas más utilizadas en los diferentes campos en que se emplea la matemática como un instrumento de cálculo.

Propósitos

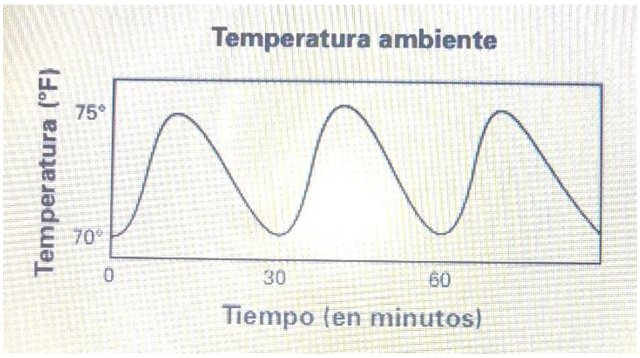
- Modelizar situaciones problemáticas que responden a comportamientos periódicos.
- Modelizar fenómenos periódicos con funciones trigonométricas.
- Verificar identidades trigonométricas.
- Resolver problemas que involucren ecuaciones trigonométricas.

ACTIVIDADES

1. EL AIRE ACONDICIONADO

Esta gráfica muestra los cambios de temperatura en una habitación con aire acondicionado.

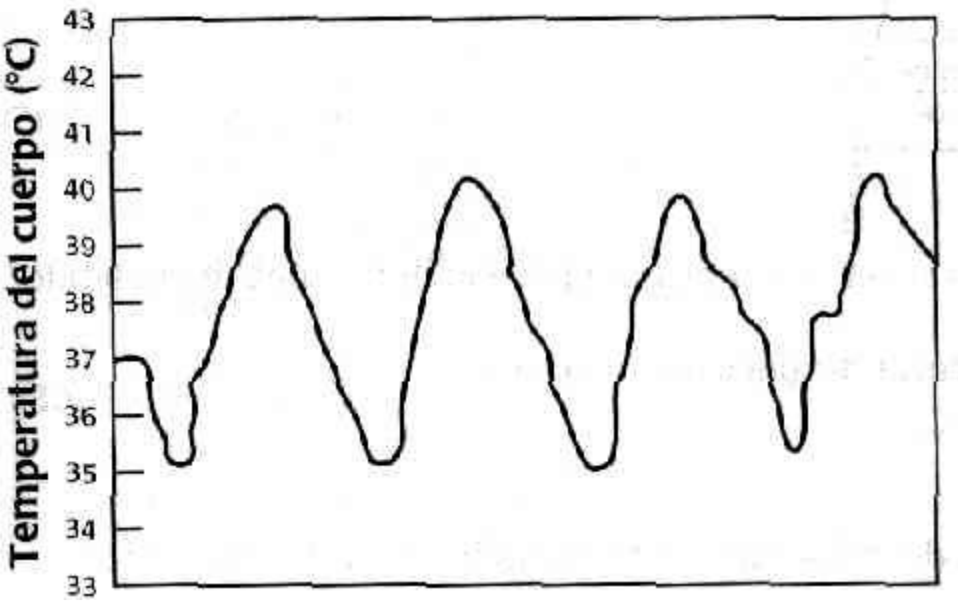
a. Describir lo que ocurre en la habitación con la temperatura. ¿Por qué sucederá esto?



b. Colorea en el gráfico un ciclo completo.
c. ¿Qué longitud (en minutos) tiene un período?

2. EL CAMELLO

La temperatura corporal de un camello cambia mucho con el transcurso de las horas del día. Aumenta al calentarse el aire del desierto durante el día, y el camello comienza a sudar cuando la temperatura de su cuerpo alcanza los 40°C. El aire del desierto se enfría durante la noche y la temperatura disminuye. La temperatura más baja ocurre aproximadamente a las 4:00 hs (ver gráfico).

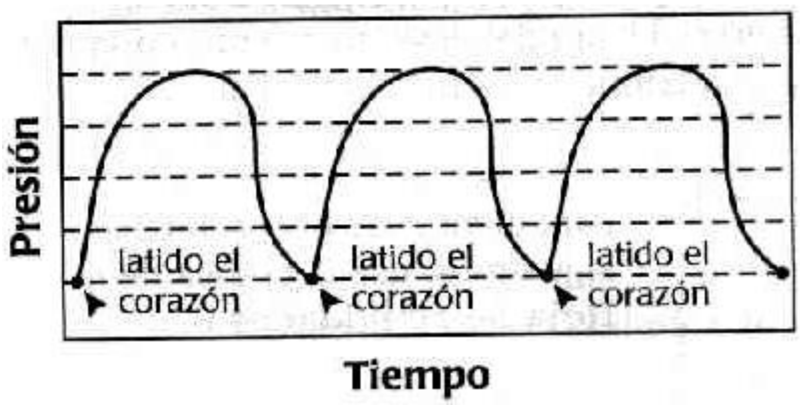


a. Rotular el eje horizontal y marcar la escala.
b. ¿Cuánto dura un período de la gráfica?
c. Colorear un ciclo de la gráfica.
d. ¿Cuál es la amplitud de la temperatura?

3. EL CORAZÓN

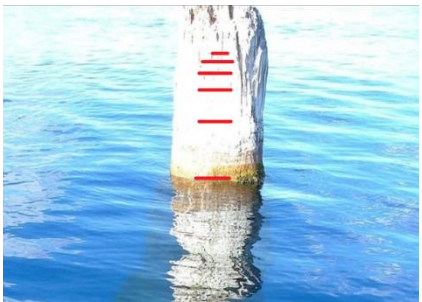
El corazón bombea sangre a través del sistema circulatorio. Para tomar la presión sanguínea, normalmente los doctores toman la presión de la sangre en la arteria ubicada en la parte superior del brazo.

La gráfica siguiente muestra cómo cambia la presión sanguínea con el tiempo.

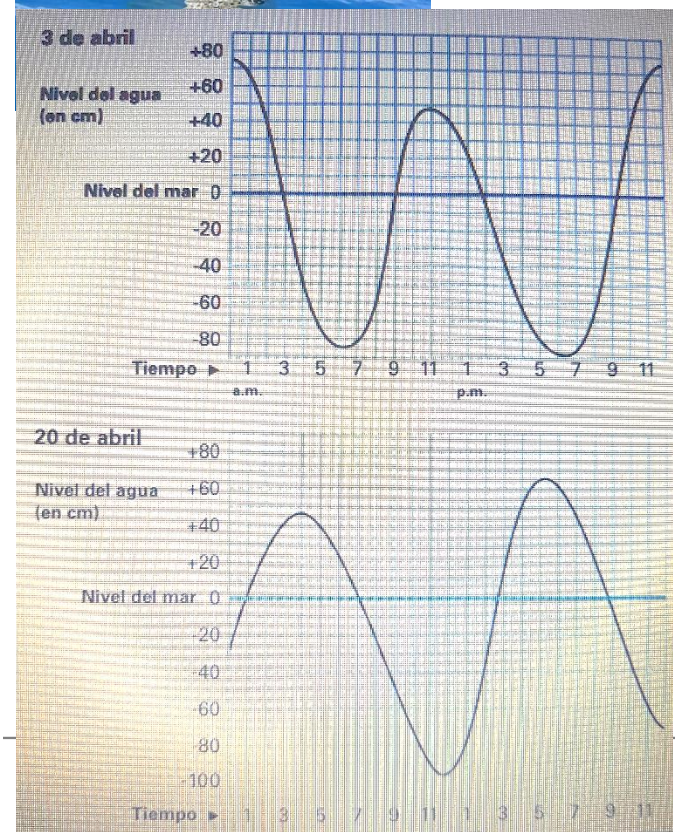


a. ¿Qué se puede decir de la presión sanguínea inmediatamente antes de un latido?
b. ¿Qué le ocurre a la presión sanguínea después del latido?
c. ¿Es periódica esta gráfica? ¿Cuál podría ser su dominio?
d. Suponiendo que esta fuera la gráfica de TU corazón, ¿qué escala pondrías en el eje de abscisas? (para ello mide la frecuencia de latidos en tu muñeca).
e. Correr unos cuantos metros en el pasillo o alrededor del edificio e inmediatamente vuelve a controlar los latidos de TU corazón. Compara con la escala puesta en el gráfico.

4. MAREAS



Bárbara y Luis están pescando en la orilla del mar desde un bote que está amarrado a un poste del muelle. Luis está aburrido porque los peces no pican, y decide entretenerse observando los cambios en el nivel del agua cuando sube y baja la marea.
Luis hace una marca en el poste cada 15 minutos (ver figura). Hace la primera marca (la de más arriba) a las 9.00 hs.



a. ¿Qué significan las marcas acerca de la manera en que cambia el nivel del agua?
b. Crear una gráfica que muestre cómo cambió el nivel del agua durante ese tiempo.
c. ¿Qué se puede decir acerca de cómo continuará la gráfica?

5. Durante las mareas bajas en los Países Bajos, los naturalistas dirigen excursiones a lo largo de las costas. Ellos destacan diversas especies de plantas y animales

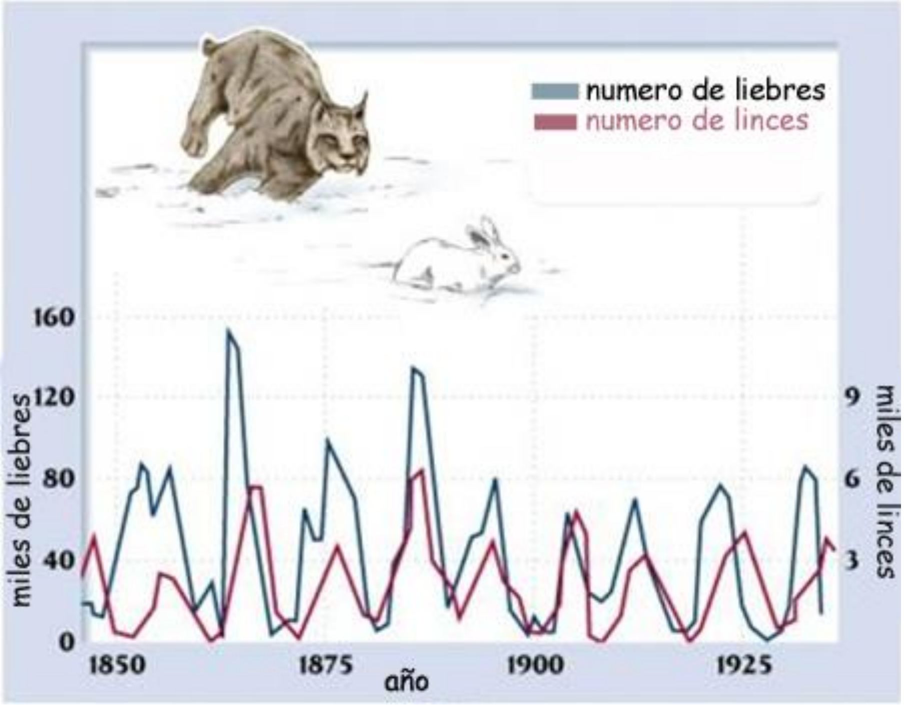
que viven en este medioambiente: algas marinas, ostras, chorlitos, mejillones, medusas, focas y otros.
Los excursionistas no siempre permanecen "secos" durante la caminata; el agua puede, a veces, llegarles hasta la cintura.
En los gráficos se puede ver el cambio de mareas durante dos días de abril.
Los guías recomiendan no realizar caminatas en aguas cuya profundidad sea mayor a 45 cm.

a. ¿Cuándo es seguro caminar por los bajíos holandeses durante esos dos días de abril?
b. Imaginar cómo continúa la gráfica.
c. ¿Si se superponen los dos gráficos éstos no coinciden, sin embargo, pareciera que la marea varía en forma constante. ¿Cómo explicar esto?

Las gráficas que estuvimos viendo tienen una cosa en común: tienen una forma que se repite. Una gráfica que se va repitiendo se llama **gráfica periódica**. La cantidad de tiempo que emplea una gráfica en repetirse se llama **período**. La porción de la gráfica que se repite se llama **ciclo**.

6. DEPREDADOR-PRESA

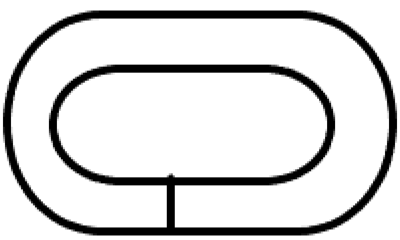
Habrás escuchado en muchas oportunidades que la naturaleza es sabia. Y la verdad es que sí y una muestra de ello es lo que los científicos denominan el "ciclo depredador-presa".
Los **ciclos** son eventos o situaciones que se repiten. Existen ciclos muy sencillos de identificar, como por ejemplo, las estaciones del año y otros muy complejos, como el ciclo del agua.
Volviendo al ciclo depredador-presa, en la naturaleza, esta relación es esencial para asegurar la preservación de un ecosistema.
En un mismo hábitat, si los depredadores son muy eficientes cazando y comiendo presas, en un corto plazo las presas podrían desaparecer. Una población o cantidad de depredadores bien alimentados traería como consecuencia una mayor reproducción y, por tanto, un aumento rápido en el número de depredadores.
¿Qué sucede si aumentan los depredadores y disminuyen las presas? Entonces, faltarán presas para alimentar al mayor número de depredadores, disminuyendo rápidamente su población. Al poco tiempo, la relación se habrá invertido y existirán más presas que predadores para cazarlas.
Para comprobar estas constantes alzas y bajas que caracterizan el ciclo depredador-presa en la naturaleza, un grupo de científicos iniciaron en el año 1850 un estudio: contaron el número de **linces** (depredador) y **liebres** (presas) en un parque nacional de Canadá. El registro se mantuvo por más de 100 años.
¿Cuáles fueron los resultados? La interacción de estas dos especies era **activa y cíclica**. Cuando el número de linces subía, la población de liebres rápidamente disminuía (ver gráfico). Pero al poco tiempo la cantidad de linces volvía a caer.



Con el gráfico se pueden observar varias cosas de las que hemos mencionado.

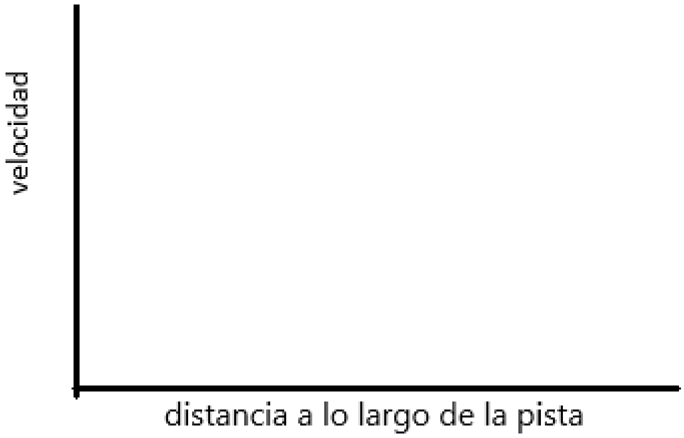
a. ¿Qué especie es más numerosa en general con el transcurso del tiempo?
b. A cada aumento de población de liebres, ¿qué pasó después con los linces?
c. A cada repunte en el número de linces, ¿qué pasó después con las liebres?
d. ¿Cuáles serán las condiciones para que estos ciclos se presenten en la naturaleza?
e. ¿Qué ocurre con los depredadores si en algún momento las presas llegan a cero (se extinguen)?
f. ¿Conoces una relación depredador-presa entre las especies de tu localidad? Descríbela.
g. ¿A qué modelo matemático se ajusta este fenómeno?
h. ¿Por qué el ciclo del lince precede al de la liebre?
i. ¿Qué intervalo de tiempo se podría considerar como período?

7. EL AUTÓDROMO



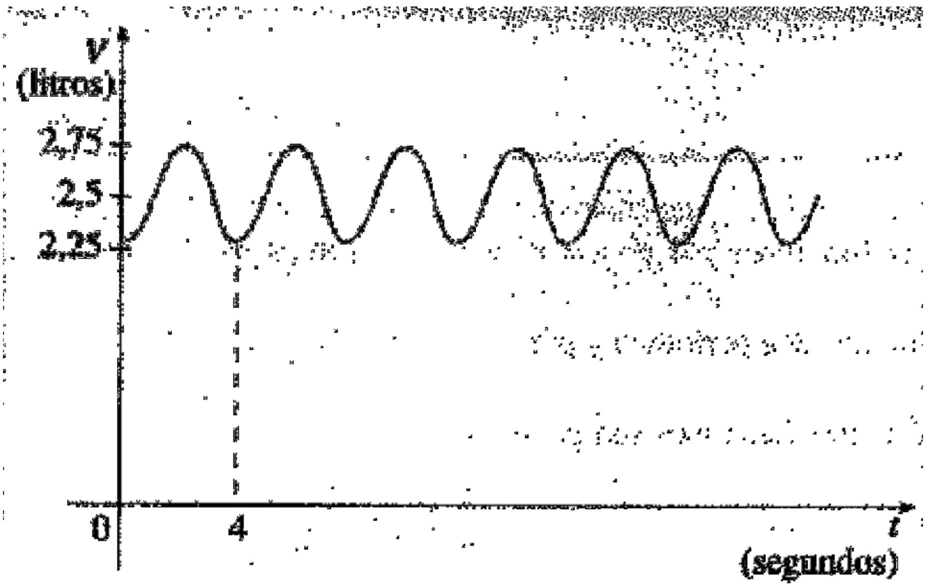
Va a comenzar la carrera de fórmula 3. Los autos se encuentran preparados para largar. El dibujo muestra el autódromo visto desde arriba.

a. Colorear sobre el esquema de la pista, los lugares donde los conductores pueden acelerar y dónde deberían disminuirla velocidad (indicando qué significa cada color).
b. Realizar una gráfica de la velocidad de un auto de carrera durante tres vueltas alrededor de la pista. Rotular la gráfica de esta manera:



c. ¿Es periódica esta gráfica?

8. COMO RESPIRAMOS
La gráfica muestra la cantidad de aire que entra en los pulmones de una persona cuando respira:



a. ¿Cuál es el máximo volumen de aire de esta persona?
b. ¿Le queda a esta persona aire en los pulmones luego de espirar?
c. ¿Cuál es el período en el que una persona en reposo inspira y espira?

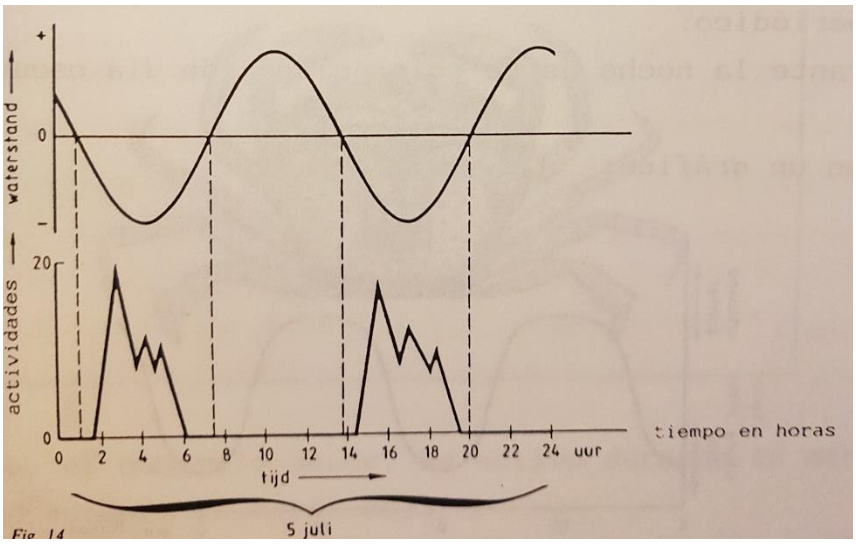
d. ¿En qué intervalos es creciente esta función? ¿Y decreciente?

<u>9. EL CANGREJO SALUDADOR</u> (PERIODICIDAD MÚLTIPLE)

Muchas veces un fenómeno periódico puede dar origen a otro fenómeno periódico. Por ejemplo, el cangrejo saludador es muy activo durante la marea baja, pero no hace nada durante la marea alta.

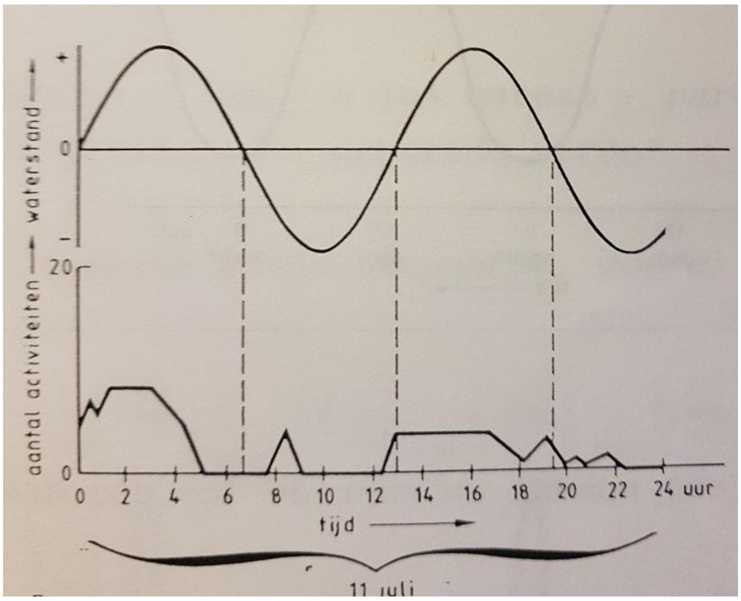
Esto quiere decir que, durante los ciclos de la marea (alta-baja), el cangrejo tiene sus ciclos de actividad que dependen de los otros.

Veamos si el gráfico aclara un poco más la situación:



En el eje vertical se indica la "actividad" con una escala 0-20. Para poder evaluar esto, se contó la cantidad de veces que el cangrejo pasó por un punto determinado.

Para seguir investigando, se colocó al cangrejo en un lugar donde no había mareas. He aquí la representación de lo que sucedió:



a. ¿Qué conclusiones se pueden extraer de ambos gráficos?

El mismo cangrejo saludador manifiesta además otro fenómeno periódico. Durante la noche es de color claro, de día oscuro. Puesto en un gráfico:

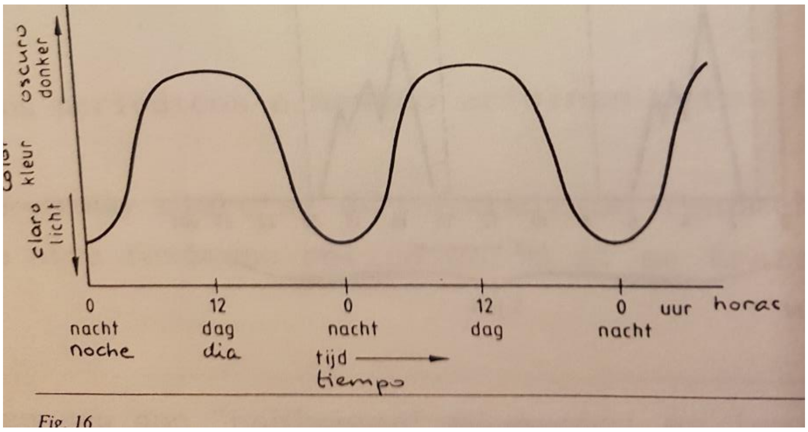
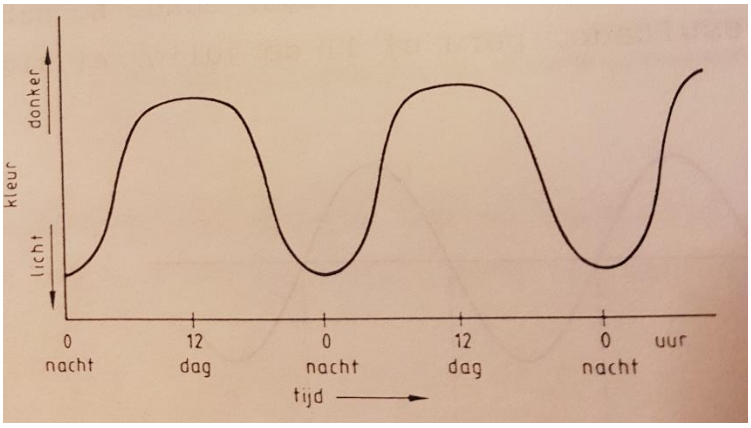


Fig. 16

Los investigadores se preguntaron si el origen del cambio de color era una razón externa (ciclo día-noche, por ejemplo). Para encontrar una respuesta a este interrogante, colocaron al cangrejo en un lugar con una cantidad de luz constante. Este fue el resultado:



b. ¿Qué conclusiones se pueden extraer de estos dos últimos gráficos?
c. Explicar qué significa un reloj biológico interno y un reloj biológico externo.

10. BIORRITMO

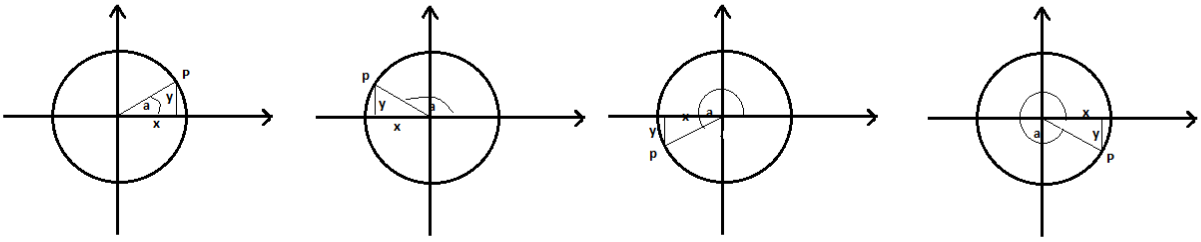
Últimamente se ha despertado bastante interés por el biorritmo. Habría tres ciclos que ejercen influencia sobre nosotros: el corporal, el de los sentimientos y el ciclo intelectual.
De acuerdo a algunos investigadores serios, se podría predecir, teniendo en cuenta estos tres ciclos, cuándo son buenas o malas nuestras posibilidades en estos tres campos.
El ciclo corporal tiene un período de 23 días (si es bueno, se refiere a sentirse fuerte, vital, tener resistencia a las enfermedades).
El ciclo de los sentimientos tiene un período de 28 días (creatividad, tristeza, alegría).
El ciclo intelectual tiene un período de 33 días.
El día de nacimiento comienzan a funcionar los relojes de los tres ciclos, desde cero y empezando a subir).

a. ¿Después de cuánto tiempo llega el ciclo nuevamente a un punto como el del nacimiento? (las tres curvas en cero y subiendo).

Los días críticos son aquellos en que una de las tres curvas alcanza su punto cero. Los días en que la curva llega a un punto mínimo, son los días de “descanso”.
b. Dibuja las curvas correspondientes a cada ciclo en un mismo gráfico.

11. Un motor a explosión

En un motor de explosión de dos tiempos, el movimiento de subida y de bajada del pistón se traduce, mediante la conducción de la biela y el cigüeñal, en un giro de volante del motor. Recíprocamente, cuando el volante gira produce el movimiento del pistón.
Al girar la rueda dentada que se denomina volante, el punto P marcado en la figura va tomando distintas posiciones:



a = π/6 a = 5π/6 a = 7π/6 a = 11π/6

El volante tiene radio 1 dm. Hallar las coordenadas del punto P en las distintas posiciones.
(Extraído de *Modelos matemáticos para interpretar la realidad*, Camuyrano y otros. Pág. 147).

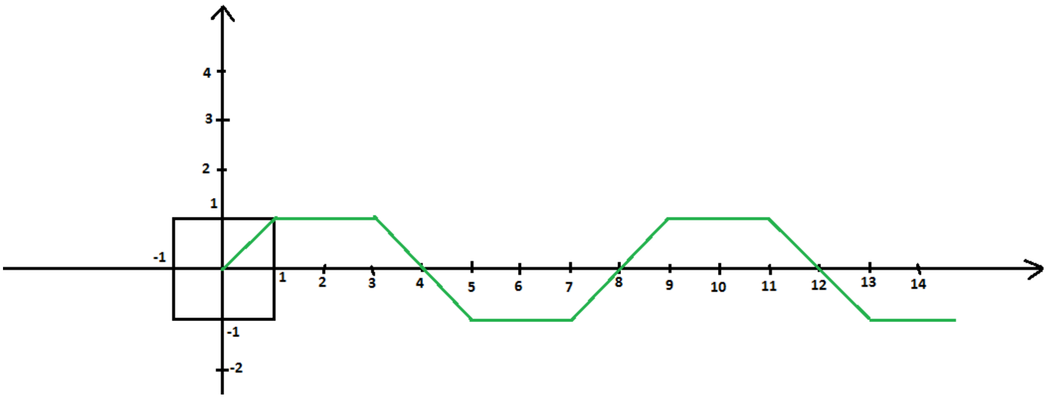
12. Tomar una hoja de oficio y enrollar con ella una vela. Cortar la vela y el papel en un ángulo de 45°. Desenrollar una de las dos mitades. ¿Qué curva queda formada en el borde? ¿Cómo puedes comprobarlo?
(Extraído de *Bachillerato 2.* Guzmán y otros. Pág. 85).

13. CAMINANDO ALREDEDOR DEL CUADRADO UNITARIO
El cuadrado unitario es un cuadrado cuyo centro está ubicado en el origen del sistema de coordenadas cartesianas con un lado de longitud 2 unidades.
Consideramos un punto P en el plano que se mueve a lo largo de los bordes del cuadrado unitario, empezando en (1,0) en el sentido contrario a las agujas del reloj.

Graficar la posición vertical del punto móvil P vs la distancia recorrida alrededor del cuadrado. El eje x (abscisa) representa la distancia a lo largo de la trayectoria que P recorrió y el eje y (ordenada) representa la posición vertical (coordenada y) de P a medida que se mueve alrededor del cuadrado.

Denominemos el gráfico que se acaba de dibujar.
Discutir las siguientes cuestiones con un compañero y tomar nota.
a. Considerar los puntos A(2,1), B(6,-1) y C(13,-1) en el gráfico s. ¿A qué posición de P en el cuadrado unitario corresponden estos puntos?
b. ¿Cuál es la distancia a lo largo del trayecto que se movió P cuando regresa a la posición inicial por primera vez?
c. ¿Cuál es esta distancia cuando pasa la segunda vez? ¿Y la tercera vez?
d. ¿A qué puntos del gráfico s corresponden? ¿Qué observas respecto de las coordenadas de estos puntos?
e. Escribe todas las características que se te ocurran del gráfico.
f. ¿Cómo interpretas el punto (-5,1) en la parte extendida de s? ¿Qué significa la parte extendida?
g. ¿Es el gráfico de una función?
h. Si tu respuesta anterior es “sí”, ¿por qué es una función?
Si tu respuesta anterior es “no”, ¿por qué no?

Considerando el gráfico s que se presenta a continuación (distancia recorrida vs posición vertical) y que se dibujó anteriormente:



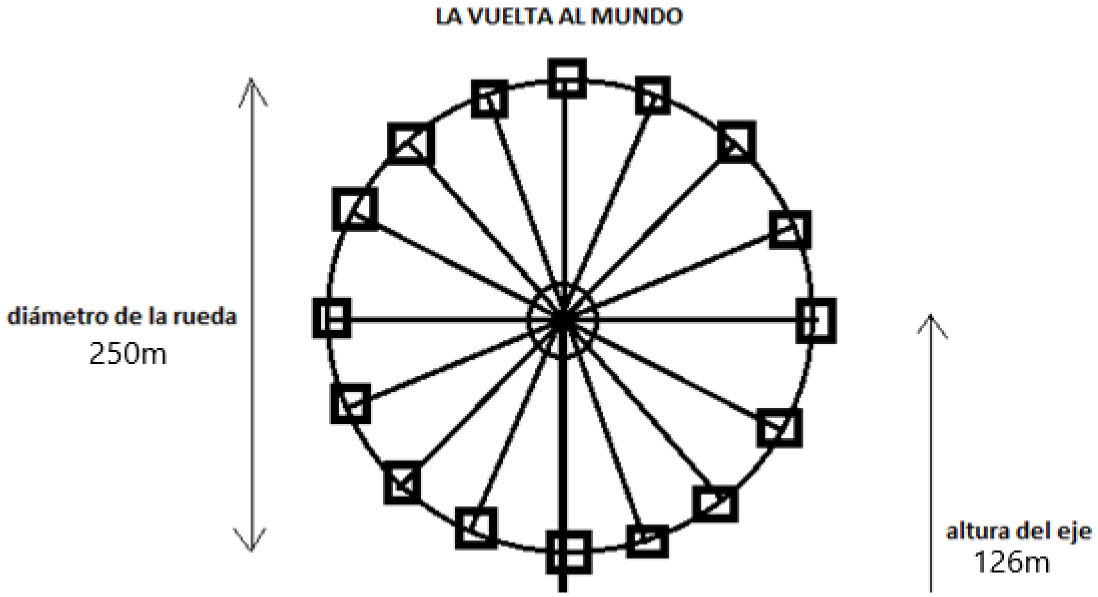
i. Responder las siguientes preguntas: S(8) = ? s(10) = ?
ii. Con una frase explicar qué significan las ecuaciones escritas en la parte a.
iii. ¿Cuál es el período del gráfico y qué significa?

<u>14. LA VUELTA AL MUNDO</u>

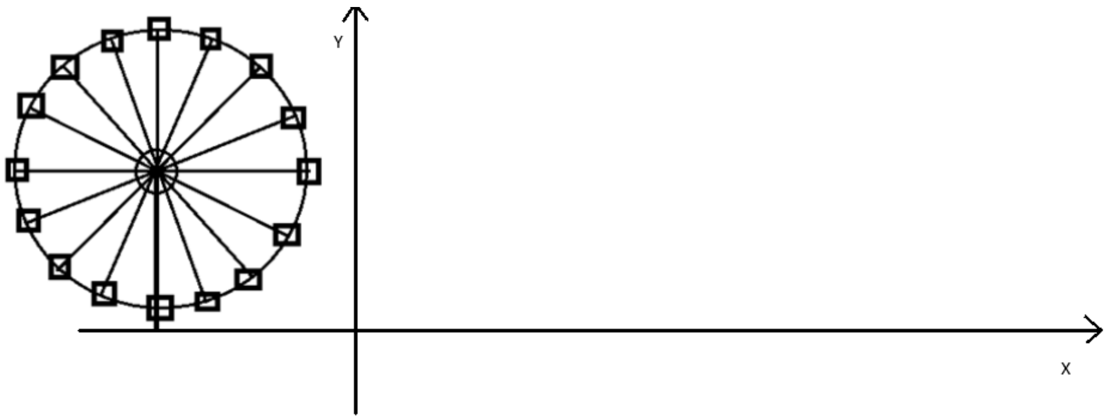
Noria de feria, rueda Ferris, rueda gigante, vuelta al mundo, etc. son todos sinónimos para dar nombre a una de las mayores atracciones de los parques de diversiones.

Una de las vueltas al mundo más grandes que se construyeron fue, en 1893, la rueda de Ferris original, que tenía 80,4 metros (264 pies) de alto. Construida para la Exposición Mundial Colombina en Chicago, Illinois, se trasladó a San Luis, Misuri, en 1904 para la Exposición de la compra de Luisiana, y se demolió allí en 1906.

Hoy en día la rueda de Ain Dubai en Dubái, Emiratos Árabes Unidos, es la más grande del mundo, tiene 250 metros (820 pies) de alto. Tarda 38 minutos en dar una vuelta completa.



a. Dibujar un sistema de ejes cartesianos a la derecha de la rueda, como se muestra a continuación:



y graficar las distintas alturas de los carritos (eje de ordenadas) a medida que gira la rueda. En el eje de abscisas la variable es el tiempo. Tener en cuenta que tarda 38 minutos en dar una vuelta completa. Considerar un buen período de tiempo en el eje de abscisas de tal manera que se puedan graficar 2 o 3 vueltas.
b. Repetir el gráfico, pero esta vez graficar las distancias de cada carrito al eje vertical que sostiene la rueda.
c. Expresar el dominio, imagen, intervalo de frecuencia, período. ¿Es una función? ¿Es biyectiva? Explicar.

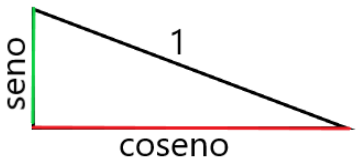
<u>FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS (modelo matemático)</u>

Una circunferencia trigonométrica es aquella que tiene radio 1 y su centro coincide con el centro de un sistema de coordenadas cartesianas.
Los ángulos se pueden medir en **grados** o en **radianes**.
La medida de un ángulo en radianes se define como la razón de la longitud de arco subtendido por ese ángulo al radio de la circunferencia. Para pasar de radianes a

grados 8º viceversa) se realiza una simple proporción directa, teniendo en cuenta que 360° equivale a 2π radianes.

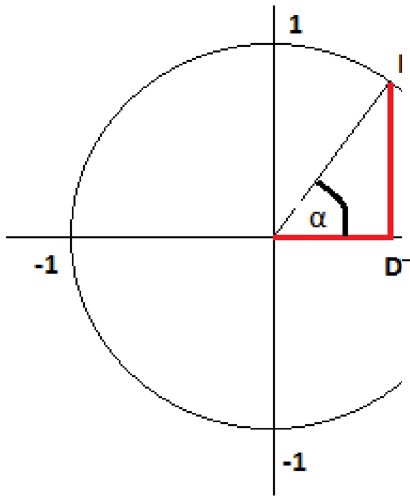
1. a. Sea P un punto móvil sobre la circunferencia trigonométrica (o unitaria) desde (1,0) en el sentido contrario a las agujas del reloj.
¿Cuáles son las coordenadas de P cuando se movió un arco de longitud π/2 a lo largo de la circunferencia unitaria? ¿Y si se movió un arco de longitud π? ¿O 3π?
b. Considera ahora que P se movió una longitud de arco de π/4 a lo largo de la circunferencia unitaria. Hacer el dibujo y responder: ¿Cuánto mide el ángulo central correspondiente a esta distancia recorrida? ¿Cuáles son las coordenadas de P?

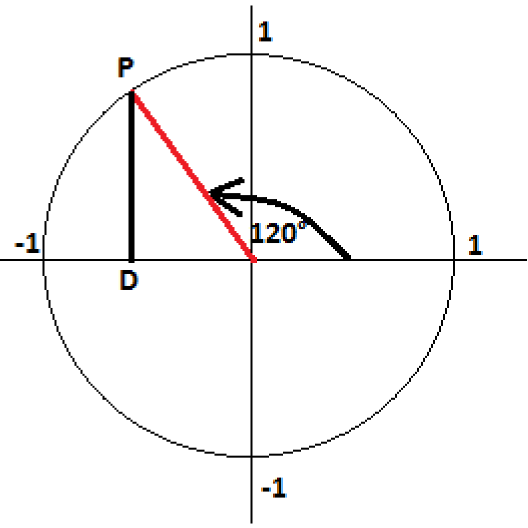
2. Supongamos que se trabajan las relaciones trigonométricas en un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide 1.



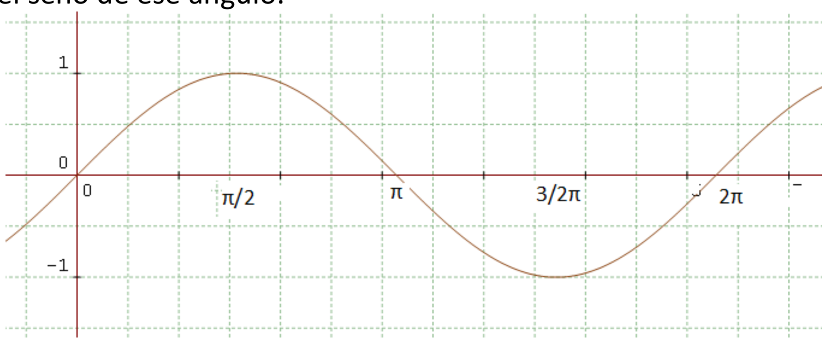
¿Cuáles son las ventajas de trabajar estas relaciones sobre una circunferencia trigonométrica?

Observar las siguientes imágenes:

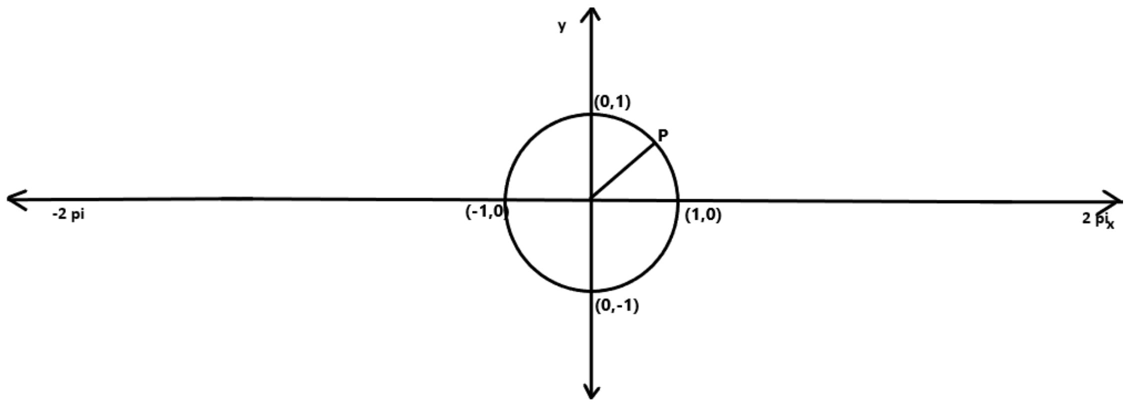




3. a. Graficar, a partir de la circunferencia trigonométrica, la función seno(x). Para ello, imaginar que un punto P recorre la circunferencia en ambos sentidos, y en cada punto (que corresponde a un ángulo, dominio) se grafica la longitud del segmento que representa el seno de ese ángulo.



b. Ídem para coseno.
c. ¿Cuál es el dominio de estas funciones? ¿Y la imagen? ¿Y su período? ¿Es biyectiva?

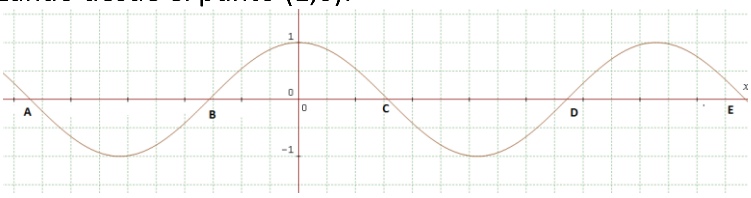


d. Completar:

sen(π) = sen (….) = …..
sen(π/2) = sen (….) = …..
sen(3/2π) = sen (….) = …..
sen(2π) = sen (…) = …..

e. ¿Cómo se expresa la función seno teniendo en cuenta su período y que su dominio es (-∞, +∞)? Ídem para coseno.

4. Dado el siguiente gráfico c de la distancia recorrida vs la posición horizontal de un punto móvil a lo largo de la circunferencia unitaria en el sentido contrario a las agujas del reloj empezando desde el punto (1,0):



a. Escribir las coordenadas de los puntos A, B, C, D, E, y G.
b. ¿Qué significa la parte del gráfico sobre el eje negativo de x?

5. Utilizando el graficador y a partir del gráfico de la función f(x) = sen x, graficar las siguientes funciones e interpretar cada uno de los parámetros:
f(x) = sen (x-1)
f(x) = sen 2 (x-1)
f(x) = 3 sen 2(x-1)
f(x) = 3 sen (x-1) + 1,5

6. Teniendo en cuenta el ejercicio 5, explicar qué modificaciones sufre la función f(x) = 1,5 sen 3(x-1) + 1. Verificar con el graficador.

La función seno (con todos sus parámetros) se expresa así:

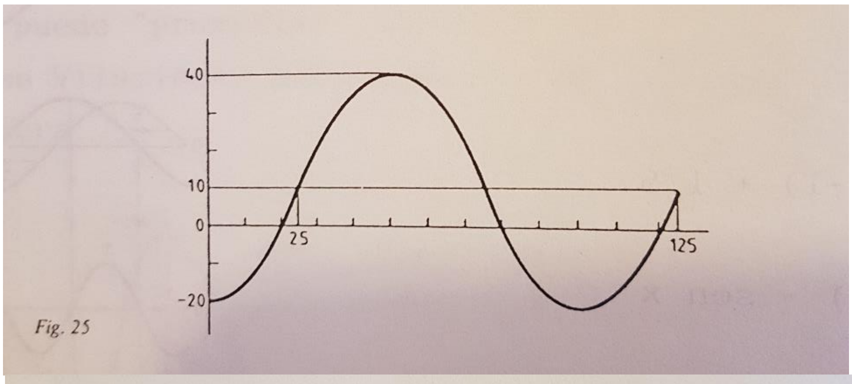
$$\boxed{f(x) = a \text{ sen } b\,(x+c) + d}$$

donde a es la amplitud
2π/b es el período
c es el desplazamiento horizontal

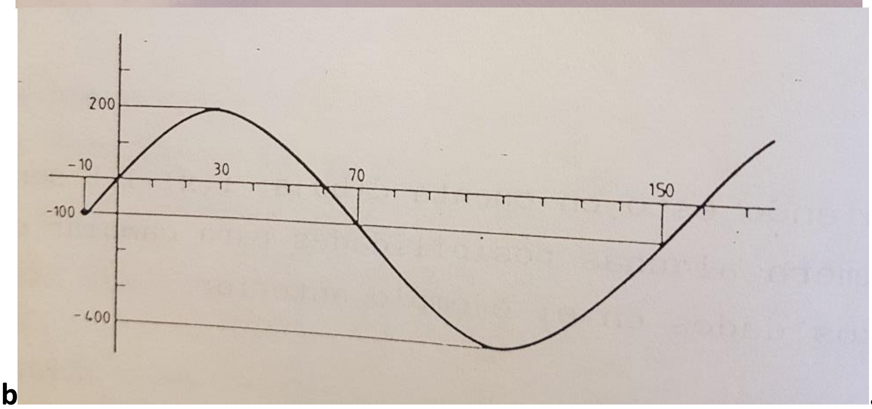
d es el desplazamiento vertical.

7. Dados los siguientes gráficos de la función seno, escribir la fórmula correspondiente teniendo en cuenta los parámetros que la afectan:

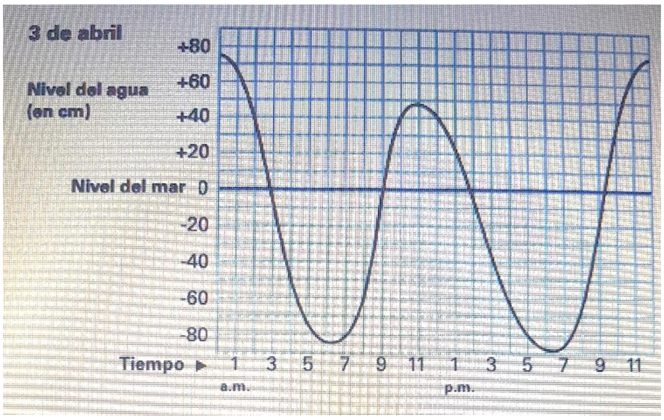
a.



b.



8. En el ejercicio 4 de la primera parte de funciones periódicas se muestra un gráfico de movimiento de mareas en los Países Bajos.



Teniendo en cuenta la función seno, escribir una fórmula aproximada que represente estos movimientos.

9. Utilizar el graficador.

a. Grafica la función y = cos x

¿Cuál es su valor máximo?

¿Cuál es el valor mínimo?

¿Cuál es el período de la función coseno?

¿Dónde interseca al eje x de abscisas?

b. Ahora mostrar el gráfico de y = 1 + cos x.

¿Cuál es su valor máximo?
¿Cuál es el valor mínimo?
¿Qué efecto le produce al gráfico de y = cos x al sumarle una constante?

c. Mostrar el gráfico de y = 2 cos x.
¿Cuál es su valor máximo?
¿Cuál es el valor mínimo?
¿Dónde interseca el eje de abscisas x?
¿Qué efecto le produce al gráfico de y = cosx multiplicarlo por una constante?
¿Cambió el período de la función?

d. ¿Qué pasa si se multiplica por -1? Eso daría y = -cos x ¿Cambió el período de la función?

e. Mostrar el gráfico de y = cos 2x.
¿Qué modificación le produce al gráfico de y = cos x cuando se multiplica a la x por una constante?
¿Cambia el período de la función?

f. Combinar algunos cambios.
Mostrar el gráfico de y = 1 + 2cos x.
¿Cuál es el valor máximo?
¿Y el mínimo?
¿Dónde interseca el eje x esta función)? ¡Estimar!
¿Qué le pasó al gráfico de y = cos x?

g. Ahora muestra el gráfico de y = 1 – cos 2x.
¿Cuál es el efecto si combinas multiplicando por -1 y multiplicando la x por una constante?

Resumiendo:
La gráfica de una **función periódica** es una curva que se repite en intervalos de tiempo de igual magnitud.
El **período** del fenómeno es el intervalo de tiempo necesario para completar un **ciclo**.
La función f(x) es periódica si f(x) = f(x+p) = f(x+2p) = … para todos los valores x del dominio de la función y siendo p una constante positiva.

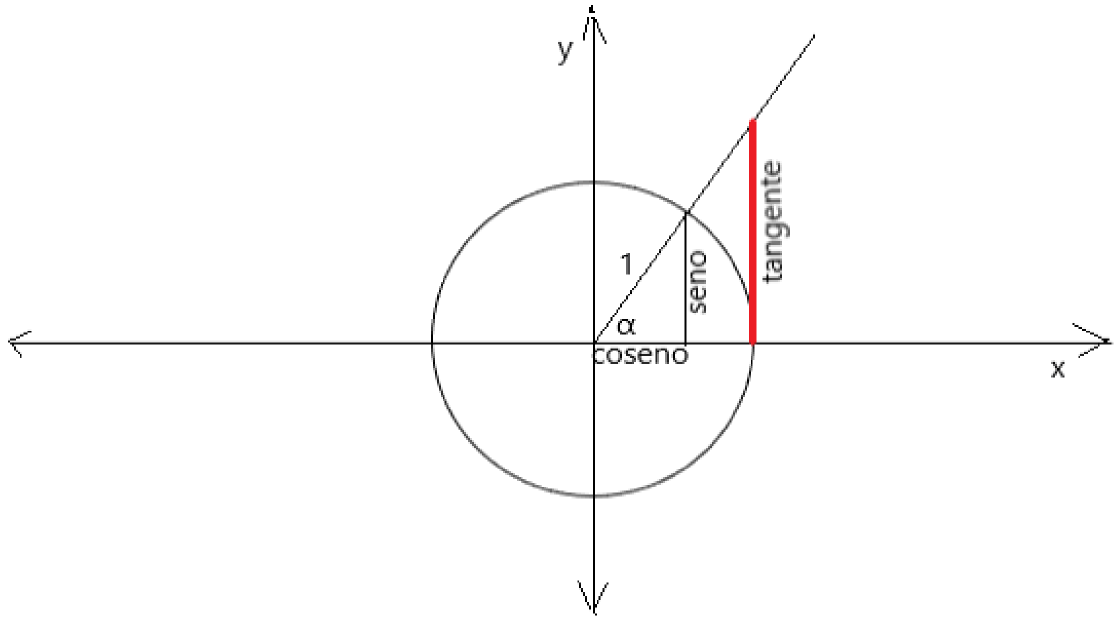
10. ¿Con qué herramienta matemática se puede demostrar la siguiente igualdad?:

$$\mathbf{sen^2\, x + cos^2\, x = 1}$$

11. a. Se define la función trigonométrica **tangente (tg)** de la siguiente manera:

$$\mathbf{tg\,x = \frac{sen\,x}{cos\,x}}$$

Demostrar, utilizando la circunferencia trigonométrica, que el segmento rojo representa geométricamente a la tangente del ángulo α



b. Graficar la función tangente con el graficador y verificar que los valores de la imagen de cada ángulo corresponden a la longitud de los segmentos correspondientes en la circunferencia trigonométrica. ¿Es continua esta función? Justificar.

Se definen las inversas de estas tres funciones trigonométricas (seno, coseno, tangente) de la siguiente manera:

$$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \; ; \; \sec x = \frac{1}{\cos x} \; ; \; \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

Denominándose cotangente, secante y cosecante.

12. Graficar con el graficador, las funciones inversas. ¿Cuál es el segmento que corresponde a la cotangente en la circunferencia trigonométrica?

13. Propiedades

Demostrar geométricamente que cualquiera sea t

a) cos (t - π/2) = sen t

b) cos t = sen (t + π/2)

c) cos (t + π/2) = - sen t

14. Analizar sobre la circunferencia trigonométrica la veracidad de las relaciones siguientes:

a. sen 30° = sen 150° **b**. sen 60° = sen 240° **c**. cosec 45° = cosec 315°

d. sen 150° = -sen 210° **e**. tg 45° = -tg 135° **f**. cotg 240° = cotg 300|

15. Indicar, en cada caso, si la proposición dada es una ecuación o una identidad:

a. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ **b.** $(a + 1)^2 = a^2 + 1$

c. $x^2 + 2x + 1 = 0$ **d.** $\sqrt{(x + 1)^2} = (\sqrt{x} + 1)^2$ si $x \geq -1$
e. $\text{sen}^2\alpha + \cos^2 \alpha = 1$ **f.** cos x = sen x

16. Verificar las siguientes identidades:
a. tg x / sen x = sec x **b.** cosec x / cotg x = sec x
c. (sen x + cos x)/ (sen x – cos x) = (sec x + cosec x) / (sec x – cosec x)
d. $1 + \text{tg}^2x = \sec^3x \cdot \cos x$ **e.** 2 tg x + 1 = (cos x + 2 sen x) / cos x
f. tg x + cotg x = 1 / (senx . cos x) **g.** $\text{cotg}^2 x(1 + \text{tg}^2 x) = \text{cosec}^2 x$

17. Resolver las siguientes ecuaciones trigonométricas. Dar la solución para ángulos $0° \leq x < 360°$:
a. 3 (1 + sen x) = 4 + sen x **b.** $3 \cos^2 x + \text{sen}^2 x = 3$
c. $4 \cos^2 x = 3 – 4 \cos x$ **d.** $\text{tg}^2 x + 3 = 2 \sec^2 x$
e. $2 \text{ tg } x – \sec^2 x = 0$ **f.** $\sec^2 x – 1 = \sqrt{3} \text{ tg } x$

18. Dadas las ecuaciones sen x = 0 , sen x = 1 , sen x = -1:

a. Completar la tabla para cuatro valores cualesquiera de x que satisfagan las ecuaciones.

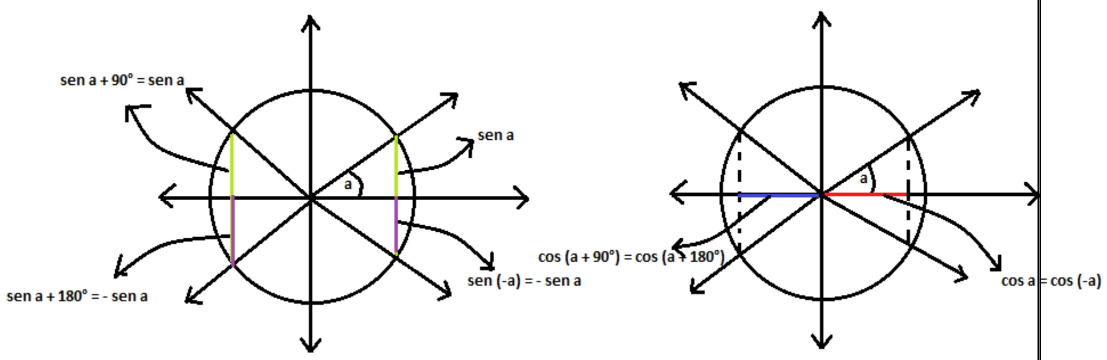
	sen x = 0	**sen x = 1**	**sen x = -1**
x			
x			
x			
x			

b. ¿Cuántas soluciones hay para cada una de estas ecuaciones? ¿Cómo puedes explicar que hay más de una solución para las ecuaciones?

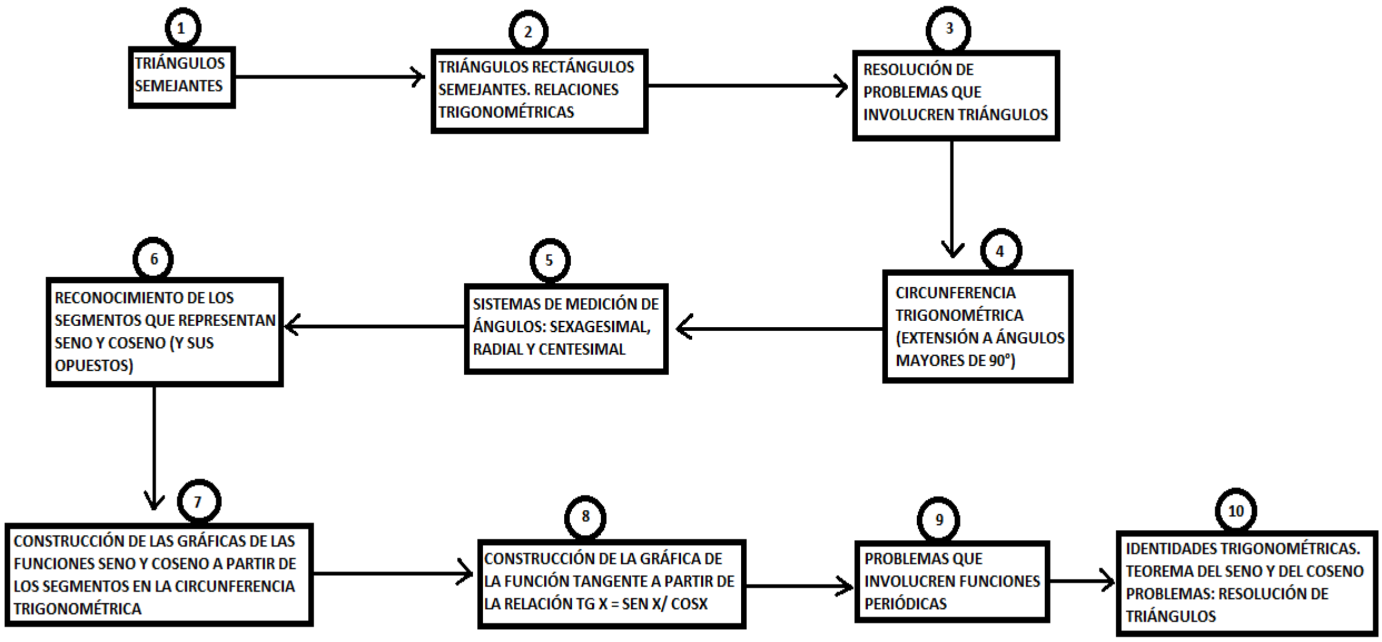
c. Todas las soluciones de sen x = 0 se pueden expresar como x =……k.π…….donde $k \in Z$
Todas las soluciones de sen x = 1 se pueden expresar como x = ………………
Todas las soluciones de sen x = -1 se pueden expresar como x = ……………

d. Para la ecuación sen x = 1, ¿cómo puedes explicar tu respuesta usando el gráfico de la función seno?

La reducción al primer cuadrante se hacía necesaria cuando se utilizaban las tablas de los valores trigonométricos, porque los ángulos tabulados eran agudos, por lo tanto, si se deseaba trabajar con un ángulo mayor de 90° había que buscar su equivalente en el primer cuadrante. Hoy en día, con el uso de las calculadoras, no es necesario. Sin embargo, se les puede pedir a los estudiantes que detecten aquellos ángulos cuyos senos o cosenos son equivalentes u opuestos. Ver figuras:



Además, esta estrategia (la de dibujar los segmentos) sirve como ayuda memoria, dándole significado a esos valores.



REFERENCIAS

- Abels, M. y de Jong, J. (1997): *Las matemáticas en contexto. De arriba abajo (Ups and downs).* Enciclopedia Británica.

- Demir, Ôzcan (2012): *Desarrollo y comprensión de los conceptos de las funciones seno y coseno para los alumnos.* Universiteit van Amsterdam Korteweg-de Vries Institute for Mathematics Science Park 904.
- Hewet Wiskunde (1985): *Periodieke functies.* Educaboek, Culemborg, The Netherlands.
- Rabino, A. y Cuello P. (2017): *Matemática Realista en la Educación Secundaria.* Ed. Novedades Educativas.
- Mathematics Assessment Resource Service University of Nottingham & UC Berkeley.
- http://map.mathshell.org © 2012 MARS, Shell Center, University of Nottingham.