

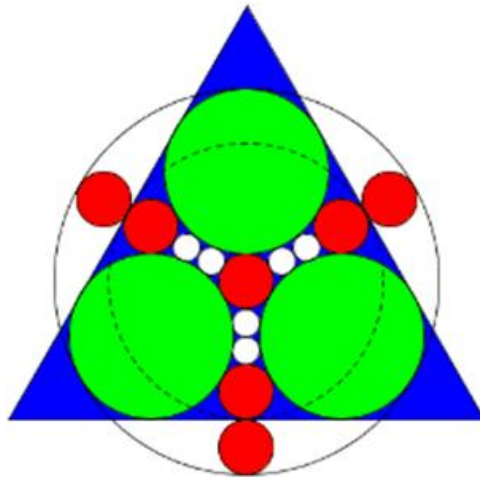
UN SANGAKU

Soluciones a cargo de: Oscar Bressan, Ana Ma. Bressan y Adriana Rabino

Se dice que durante el período Edo (Japón, 1603 -1867) colgar Sangakus en templos y santuarios era tan popular que incluso las mujeres y los niños participaban de la actividad. Aquí ponemos un ejemplo. Este sangaku ha sido colgado por Tanabe Shigetoshi, de 15 años de edad, en el año 1865 en el Templo Meiseirinji en Ogaki City, Gifu prefecture.

Referencia: H. Fukagawa, A. Rothman, *Sacred Mathematics: Japanese Temple Geometry*, Princeton University Press, 2008, p. 97.

Sean un triángulo equilátero azul, tres círculos verdes de radio a , cinco círculos rojos de radio b , y seis círculos blancos de radio c , tangentes entre sí como se muestra. Si R es el radio del círculo de afuera y r es el radio del círculo inscripto en el triángulo, encontrar c en función de r .



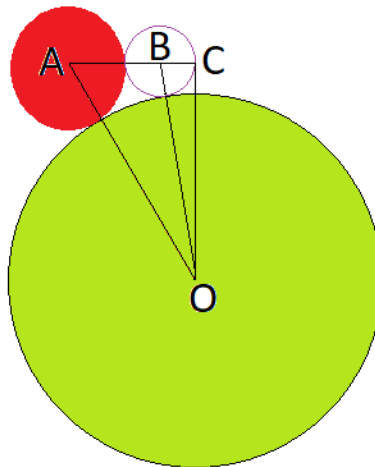
Solución 1

De la figura se deduce:

$$r = 2b + 4c + b = 3b + 4c$$

$$R = r + 2b = 2a + b$$

$$\rightarrow r = 2a - b$$



De la figura anterior se deduce (por Pitágoras):

$$(OA)^2 = (OC)^2 + (AC)^2 \quad \rightarrow \quad (a + b)^2 = (OC)^2 + (b + 2c)^2$$

$$(OB)^2 = (OC)^2 + (BC)^2 \quad \rightarrow \quad (a + c)^2 = (OC)^2 + c^2$$

Eliminamos $(OC)^2$ $(a + b)^2 - (b + 2c)^2 = (a + c)^2 - c^2$

Usando el Mathematica:

$$\text{Solve}[\{r == 3b + 4c, r == 2a - b, (a + b)^2 - (b + 2c)^2 == (a + c)^2 - c^2\}, \{a, b, c\}]$$

$$\left\{ \left\{ a \rightarrow \frac{3r}{5}, b \rightarrow \frac{r}{5}, c \rightarrow \frac{r}{10} \right\}, \{a \rightarrow 0, b \rightarrow -r, c \rightarrow r\} \right\}$$

Extensión: ¿Cuánto mide el ángulo AOC y cuánto el BOC?

El ángulo AOC mide 30° . Esto es obvio por la simetría de hexágono que tiene el problema.

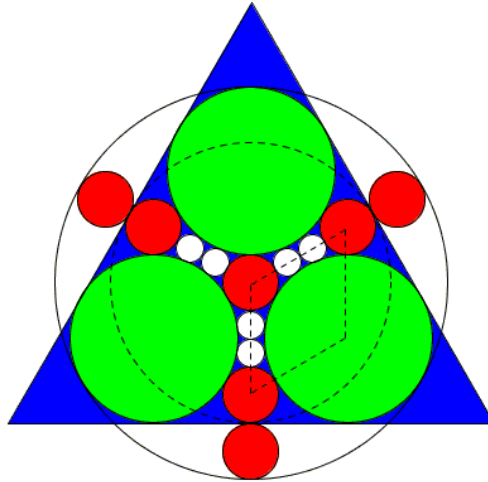
Teniendo en cuenta que $AC/CO = (r/5 + 2r/10) / CO = \text{Tan}[30^\circ]$ entonces

$$CO = (r/5 + 2r/10) / \text{Tan}[30^\circ]$$

$$BC/OC = \text{Tan}[x] = (r/10) / OC = (r/10) * \text{Tan}[30^\circ] / (r/5 + 2r/10) = 0,144337...$$

$$x = 8,21318^\circ$$

Solución 2



Considerando que el cuadrilátero trazado con lados consecutivos iguales resulta un rombo tenemos que $a+b = 2b + 4c$, se deducen de la imagen las relaciones siguientes:

$$r = 3b + 4c$$

$$R = 5b + c$$

$$R = 2a + b$$

$$r = 2a - b \Rightarrow 3b + 4c = 2a - b \Rightarrow 4b + 4c = 2a \Rightarrow \mathbf{2b + 2c = a}$$

$$a + b = 2b + 4c \Rightarrow \mathbf{a = b + 4c}$$

$$\Rightarrow 2b + 2c = b + 4c \Rightarrow \mathbf{b = 2c}$$

$$\Rightarrow \mathbf{r = 3b + 4c = 6c + 4c = 10c}$$

Extensión: Solución obtenida en una primera versión el Chat GPT el 15 de abril de 2023, primera versión. ¿Podrías considerar si es correcta y explicar tus respuestas?

R: Este es un problema interesante de geometría. Primero, podemos observar que los círculos verdes y rojos se tocan entre sí en el centro del triángulo equilátero azul. Los seis círculos blancos también se tocan en el centro del triángulo, pero no se tocan con los otros círculos.

La clave para resolver el problema es notar que el radio de la circunferencia que circunscribe el triángulo equilátero azul es igual a la suma de los radios de los círculos verde, rojo y blanco que tocan esa circunferencia. Es decir:

$$R = a + b + c$$

También podemos notar que el radio de la circunferencia inscrita en el triángulo equilátero azul es igual al doble del radio de los círculos blancos. Es decir:

$$r = 2c$$

Podemos utilizar la relación entre el radio de la circunferencia circunscrita y los radios de los círculos para encontrar una ecuación que involucre c y r . Reemplazando R en términos de a , b y c , obtenemos:

$$a + b + c = R$$

Pero también podemos notar que la distancia desde el centro del triángulo hasta el centro de los círculos rojos es igual a la suma de los radios de los círculos rojos y blancos. Es decir:

$$a + b + 2c = 2r$$

Ahora podemos resolver este sistema de ecuaciones simultáneamente para encontrar c en términos de r . Primero, podemos despejar $a + b$ en la primera ecuación:

$$a + b = R - c$$

Luego, podemos reemplazar $a + b$ en la segunda ecuación por $R - c$:

$$R - c + 2c = 2r$$

Simplificando, obtenemos:

$$c = R - r$$

Reemplazando R en términos de a , b y c , tenemos:

$$c = (a + b + c) - r$$

Reemplazando $a + b$ en términos de R y c , tenemos:

$$c = (R - c) + c - r$$

Simplificando, obtenemos:

$$c = (R - r) / 2$$

Por lo tanto, la solución al problema es:

$$c = (R - r) / 2$$

Donde $R = a + b + c$ y $r = 2c$.

Hemos puesto esta solución obtenida del ChatGPT para que los estudiantes no se confíen en la inteligencia artificial sin analizar sus respuestas.