U NA RAREZA MATEMÁTICA

Oscar Bressan

Una herramienta fundamental del análisis matemático es el concepto de límite, que significa a qué valor tiende una función cuando la variable independiente tiende a un cierto valor. Por ejemplo si:

$$y = 1/x$$

¿A qué valor tiende "y" cuando "x" tiende a infinito? Observamos que cuanto más grande sea "x" más pequeño va a ser el valor de "y". Si "x" tiende a un valor infinitamente grande "y" va a tender a un valor infinitamente pequeño, lo que nos lleva a concluir que "y" tiende a cero si "x" tiende a infinito.

Convencionalmente se escribe como:

$$y = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$$

o sea que "y" es el límite de "1/x" para x tendiendo a infinito.

Vamos a buscar el límite de tres expresiones muy parecidas, donde "ε" es un número real positivo tan pequeño como se quiera pero diferente de cero:

a) $$y = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \varepsilon + \frac{1}{x}\right)^x$$

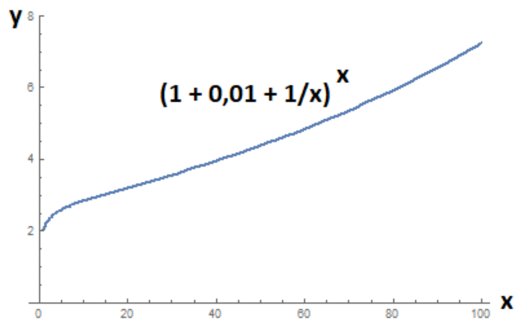
b) $$y = \lim_{x \to \infty} \left(1 - \varepsilon + \frac{1}{x}\right)^x$$

c) $$y = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

En el caso a) tendremos la expresión (1 + ε + 1/x) multiplicada por si misma x veces:

$$y = \left(1 + \varepsilon + \frac{1}{x}\right)^x = \left(1 + \varepsilon + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \varepsilon + \frac{1}{x}\right) \ldots\ldots \left(1 + \varepsilon + \frac{1}{x}\right)$$

Para ε = 0,01 el gráfico de "y" para valores de "x" de 1 a 100 es:



Veamos que ocurre si ε= 0,001 para distintos valores de "x".

Para x = 10 $y = (1 + 0{,}001 + 1/10)^{10} = 2{,}617...$

Para x = 100 $y = (1 + 0{,}001 + 1/100)^{100} = 2{,}786...$

Para x = 1.000 $y = (1 + 0{,}001 + 1/1.000)^{1.000} = 7{,}374...$

Para x = 10.000 $y = (1 + 0{,}001 + 1/10.000)^{10.000} = 59513{,}3...$

Para x = 20.000 $y = (1 + 0{,}001 + 1/20.000)^{20.000} = 5.552.426.930{,}97$

Observamos que cuanto mayor sea "x" más grande va a ser "y". También es fácil observar que cualquiera sea el valor de "ε" siempre "y" va a tender a infinito cuando "x" tiende a infinito.

$$y = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \varepsilon + \frac{1}{x}\right)^x = \infty$$

Esto es una consecuencia de que:

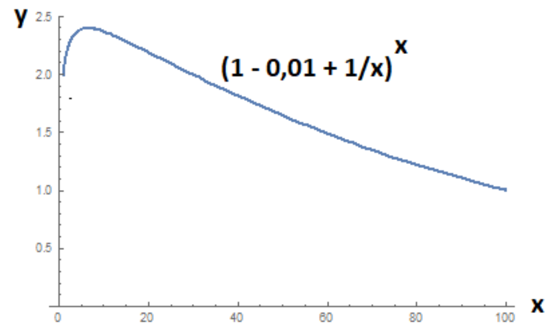
$1 + \varepsilon + 1/n > 1$

Y tenemos infinitos factores todos mayores que "1".

En el caso b) tendremos la expresión (1 -ε + 1/x) multiplicada por si misma x veces:

$$y = \left(1 - \varepsilon + \frac{1}{x}\right)^x = \left(1 - \varepsilon + \frac{1}{x}\right)\left(1 - \varepsilon + \frac{1}{x}\right)......\left(1 - \varepsilon + \frac{1}{x}\right)$$

Para ε = 0,01 tenemos el siguiente gráfico de "y" para valores de "x" de 0 a 100:



Veamos que ocurre si ε= 0,001 para distintos valores de "x".

Para x = 10 $y = (1 - 0{,}001 + 1/10)^{10}$ = 2,57026...

Para x = 100 $y = (1 - 0{,}001 + 1/100)^{100}$ = 2,44972...

Para x = 1.000 $y = (1 - 0{,}001 + 1/1.000)^{1.000}$ = 1

Para x = 10.000 $y = (1 - 0{,}001 + 1/10.000)^{10.000}$ = 0,000122911...

Para x = 20.000 $y = (1 - 0{,}001 + 1/20.000)^{20.000}$ =0,0000000055524...

Ahora vemos que cuanto mayor sea "x" más pequeño va a ser "y". También es fácil observar que cualquiera sea el valor de "ε" el valor de "y" va a tender a cero.

$$y = \lim_{x\to\infty}\left(1 - \varepsilon + \frac{1}{x}\right)^x = 0$$

Esto es una consecuencia de que:

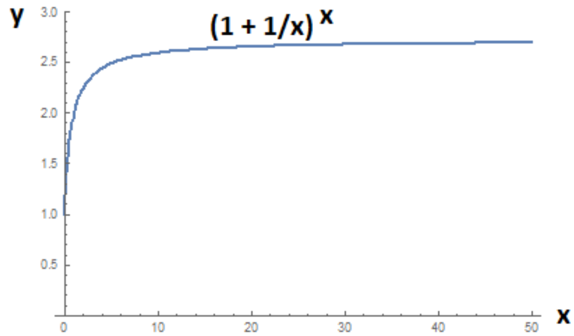
$1 - \varepsilon + 1/n < 1$

cuando $1/n < \varepsilon$ y desde "n" en adelante tenemos infinitos factores menores que "1".

O sea que con un término + ε el límite es infinito y con un término - ε el límite es cero. ¿Qué pasa en el caso c) cuandoε = 0?

$$y = \lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = ?$$

Veamos el gráfico de "y" para diferentes valores de "x":



Aquí "y" tiende a un valor constante como se verifica para distintos valores de "x".

Para x = 10 $\quad y = (1 + 1/10)^{10} = 2{,}59374...$

Para x = 100 $\quad y = (1 + 1/100)^{100} = 2{,}70481...$

Para x = 1.000 $\quad y = (1 + 1/1.000)^{1.000} = 2{,}71692...$

Para x = 10.000 $\quad y = (1 + 1/10.000)^{10.000} = 2{,}71815...$

Para x = 100.000 $\quad y = (1 + 1/100.000)^{100.000} = 2{,}71827...$

Para x = 1.000.000 $\quad y = (1 + 1/1.000.000)^{1.000.000} = 2{,}71828...$

y el límite es un número tan particular que tiene nombre propio, se llama "e"

$$y = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = 2{,}718281828459... = e$$

El número "e" (irracional trascendente) es de notable importancia en la matemática superior, y es considerado uno de los cinco números más relevantes (los otros cuatro son el "1", el "0", "i" y "π") dentro de ella.

Resumiendo, el límite de:

$$y = \lim_{x\to\infty}\left(1+\varepsilon+\frac{1}{x}\right)^{x}$$

es infinito si $\varepsilon > 0$, es cero si $\varepsilon < 0$ y es "e" si $\varepsilon = 0$, y no importa si ε es tan pequeño como se quiera.