MATEMÁTICA A TRAVÉS DEL PLEGADO DE PAPEL

ALTON T. OLSON
Universidad de Alberta
Edmonton, Alberta

Traducción y adaptación: Adriana Rabino

Si los docentes de matemática y maestros tuvieran que elegir el principio más importante para el aprendizaje de las matemáticas probablemente hagan alusión a las "experiencias matemáticas activas".

Una manera interesante de agregar un elemento de experiencia activa a una clase de matemática es la de plegar papel. Formar líneas rectas al hacer pliegues en un trozo de papel es una buena manera de descubrir relaciones sobre líneas y ángulos. Al descubrir una relación al plegar el papel, el posterior trabajo formal no se verá tan extraño. El plegado de papel no solo simplifica el aprendizaje de las matemáticas, sino que también construye una base experimental necesaria para futuros aprendizajes.

Los conceptos e ideas de movimiento o transformación en geometría se volvieron el pasaje estándar para el currículo de matemática. El plegado de papel ofrece muchas oportunidades para ilustrar estas ideas. Plegar un papel por la mitad y hacer que las mitades coincidan es un modelo físico excelente para una reflexión de línea (recta).

Los ejercicios en esta publicación son apropiados para diferentes niveles. Algunos ejercicios son convenientes de hacer por parte de los estudiantes en un nivel relativamente alto – por ejemplo, la sección de cónicas completa, está adaptada para estudiantes de la escuela secundaria superior. Otros ejercicios, los más simples, fueron disfrutados por estudiantes de la escuela elemental. La mayoría de los ejercicios introductorios probablemente sean apropiados para estudiantes de escuela secundaria. Muchos de estos ejercicios son recreacionales y de una naturaleza enriquecedora. Algunos de ellos son del tipo patrón, como el de "curvas de dragón".

Los únicos materiales que se necesitan para hacer ejercicios de plegado de papel son papel, rotulador, regla y tijeras. Aunque se puede usar cualquier tipo de papel, el papel de cera tiene numerosas ventajas: un pliegue se transforma en una línea blanca distintiva, y la transparencia ayuda a que los estudiantes "vean" que en el plegado, líneas y puntos se pueden hacer coincidir ubicando uno sobre el otro.

Aunque el plegado de papel es fácil, no siempre pasa lo mismo al querer dar instrucciones claras a los estudiantes, ya sean orales o escritas. Ayuda mucho suplementar las demostraciones con instrucciones y diagramas. En el texto que continúa, los diagramas están numerados con la referencia correspondiente al ejercicio. No están numerados en forma consecutiva. A medida que se leen las descripciones, se debe realizar el plegado descripto. Después de que se practicaron estos plegados, se pretende lograr que el método pueda hacerse extensivo a muchas construcciones más complejas. En matemática siempre hacemos ciertas suposiciones básicas sobre las que construimos una estructura matemática. En el plegado de papel suponemos los siguientes postulados:

El papel se puede plegar de tal manera que:

- el pliegue formado sea una línea recta,

- el pliegue pase a través de uno o dos puntos dados,
-un punto se puede hacer coincidir con otro punto de la misma hoja,
- rectas en la misma hoja pueden hacerse coincidir,
- un punto en el papel se puede hacer coincidir con una línea dada en la misma hoja y el resultado del doblez se puede hacer pasar por un segundo punto dado de tal manera que el segundo punto no esté en el interior de una parábola que tiene al primer punto como foco y la línea dada como directriz. (Una parábola forma la frontera entre una región convexa (interior) y una región no convexa (exterior) del plano.

Recta y ángulos se dicen que son congruentes cuando se los puede hacer coincidir al plegar el papel.

Si estas suposiciones (premisas) son aceptadas, entonces es posible realizar plegando todas las construcciones de la geometría euclidiana del plano.

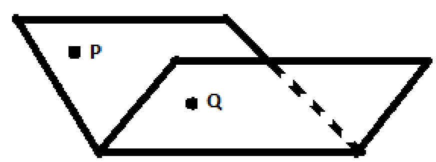
Cómo plegar construcciones básicas

Una variedad de figuras geométricas y relaciones se pueden demostrar usando las siguientes instrucciones. Si se tiene una cantidad de papel de calcar y un par de marcadores, se está preparado para una nueva forma de aprender matemática.

LUGARES GEOMÉTRICOS

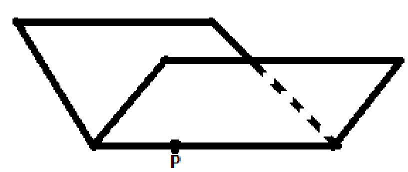
1. **Plegando una recta**

Hacer coincidir cualquier punto P de una porción de hoja de papel con cualquier otro punto Q de esa misma hoja. Mientras estos dos puntos se sostienen bien juntos por el dedo pulgar y el índice de una mano, plegar la hoja de papel con el dedo pulgar e índice de la otra mano. Luego extender el pliegue en los dos sentidos para formar una línea. De cualquier punto sobre el pliegue la distancia a P y a Q es la misma. ¿Por qué el pliegue forma una recta?



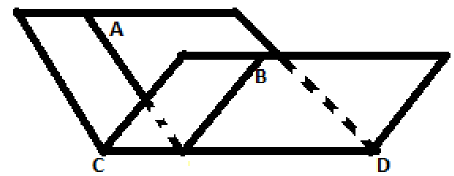
2. **Una recta a través de un punto dado**

Con cuidado, formar un pliegue corto que pase a través de un punto dado. Extender el pliegue como se describió previamente.



3. **Una recta perpendicular a otra recta dada**

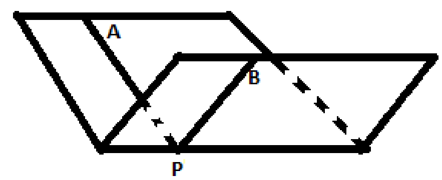
Construir, con plegado, una línea AB. Plegar la hoja para que un segmento de la línea AB se pliegue sobre sí misma. Sosteniendo la hoja con el pulgar y el índice con una mano, formar el pliegue con la otra mano como la figura (ejercicio 1).



La línea AB se refleja sobre sí misma por una reflexión (simetría axial) en la línea formada por el pliegue (eje de simetría). ¿Por qué se forma un ángulo recto con la línea dada AB bisecada por la CD?

4. **La perpendicular a una línea en un punto sobre ésta**

Construir, con plegado, una línea AB. Sea P un punto sobre la línea. Plegar el papel de tal manera que la línea dada AB se pliegue sobre sí mismo en el punto P.

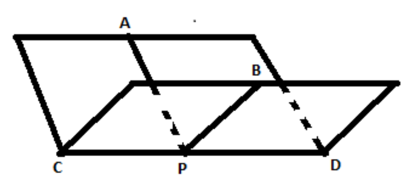


Otra vez la línea AB se refleja sobre sí misma por una reflexión respecto de la línea formada por el pliegue. El punto P es su propia imagen en esta reflexión. ¿Por qué es el pliegue a través de P perpendicular a AB?

Propiedad (postulado): En un plano, hay una y sólo una línea perpendicular a una recta dad que pase por un punto dado.

5. **Una línea perpendicular a una línea dada que pase a través de un punto dado P fuera de la línea**

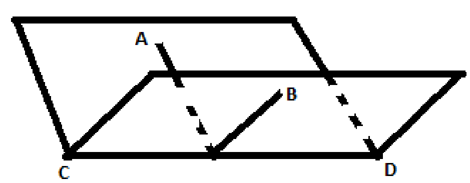
Usar el mismo método de plegado como se indicó en el ejercicio 4, teniendo en cuenta que el punto P es exterior a AB.



Propiedad: En un plano, hay una y sólo una línea perpendicular a una línea dada a través de un punto dado fuera de esta línea.

6. **La mediatriz de un segmento dado**

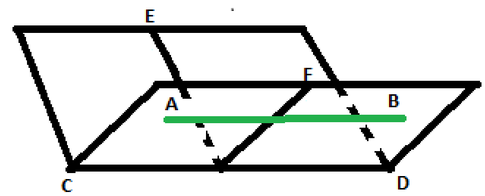
Dada la línea AB, plegar el papel de tal manera que los puntos extremos de la línea AB coincidan. ¿Por qué el doblez CD es mediatriz de AB? Localizar cualquier punto en la mediatriz. Este punto ¿está a la misma distancia de A y B? ¿Cuál es la imagen del segmento que va desde un punto cualquiera de la mediatriz a A cuando se refleja en ésta?



Propiedad: Un segmento tiene uno y sólo un punto medio.

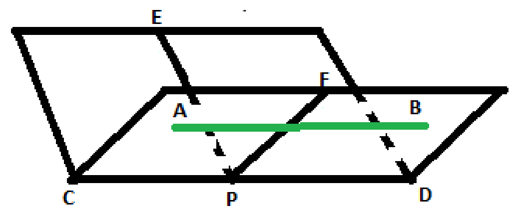
7. **Una línea paralela a una recta dada**

Primero plegar la perpendicular EF a una línea AB dada como en el ejercicio 3. Luego plegar una perpendicular a EF. ¿Por qué este último pliegue CD es paralelo a la línea AB dada?



8. **Una línea a través de un punto dado y paralela a una recta dada**

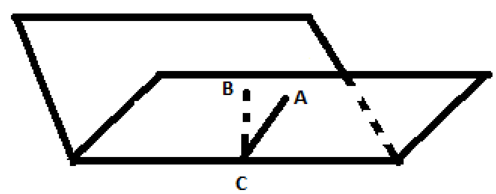
Primero plegar una línea EF a través de un punto dado P perpendicular a una línea AB dada como en el ejercicio 5. De forma similar, plegar una línea CD a través del punto dado P y perpendicular a este pliegue EF formado con el primer doblez. ¿Por qué este pliegue proporciona la línea pedida?



Propiedad: Si dos líneas coplanares distintas son intersecadas por una transversal que produce un par de ángulos alternos internos congruentes, las líneas son paralelas.
Propiedad: Si dos líneas coplanares distintas son intersecadas por una transversal que produce un par de ángulos correspondientes congruentes, las líneas son paralelas.

9. **La bisectriz de un ángulo**

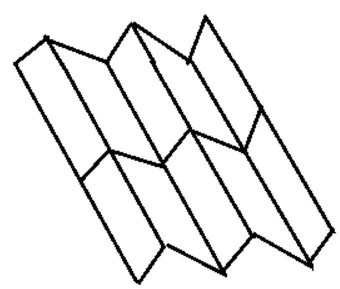
Plegar un ángulo cualquiera en un papel. Plegar y doblar el papel de tal manera que los lados CA y CB del ángulo dado coincidan. ¿Por qué el doblez debe pasar por el vértice del ángulo BCA? ¿Cómo puedes mostrar que el ángulo es bisecado?
Un ángulo se transforma sobre sí mismo a través de una reflexión en su bisectriz.



Propiedad: Un ángulo tiene una y sólo una bisectriz.

10. **La ubicación de puntos a la misma distancia a lo largo de una línea**

Plegar una línea. Establecer una longitud conveniente como unidad de longitud plegando un segmento de la línea sobre sí mismo. Formar pliegues iguales y paralelos doblando hacia adelante y hacia atrás para formar pliegues similares a los de un acordeón.

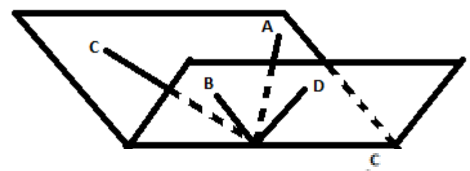


11. **La formación de un ángulo recto**

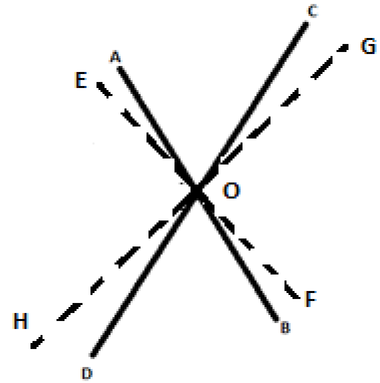
Cualquiera de las construcciones anteriores que involucren perpendiculares se pueden usar para producir ángulos rectos. Ver ejercicios 3, 4, 5 y 6.

CONCEPTOS GEOMÉTRICOS RELACIONADOS CON LAS REFLEXIONES ILUSTRADOS A TRAVÉS DEL PLEGADO DE PAPEL

12. Ángulos verticales (*vertical angles*, opuestos por el vértice)



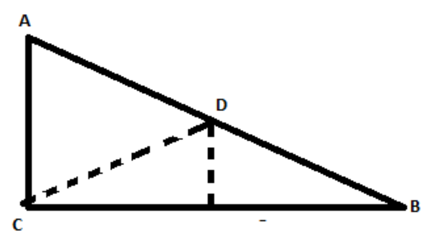
Determinar dos líneas AB y CD que se intersequen en O. Plegar el papel a través del vértice O, de tal manera que BO coincida con CO. ¿AO coincide con DO? ¿Los ángulos opuestos por el vértice, son congruentes?



Con marcadores de diferentes colores dibujar las líneas AB y CD que se intersecan en O. Hacer dos pliegues EF y GH en el papel de tal manera que sean perpendiculares en O. Ninguno de estos pliegues debe ser interior a los ángulos opuestos por el vértice AOC y BOD. Ahora los ángulos verticales deben coincidir. La línea AB debe coincidir con sí misma, y la línea CD debe también debe coincidir con sí misma. ¿Qué diferencias ves entre el resultado de las dos figuras presentadas?
Matemáticamente, uno de los ángulos verticales en la segunda figura fue rotado 180° con centro de rotación O. También, en el par de ángulos verticales, uno de los ángulos es la imagen del otro después de una reflexión (simetría central) en O.
Propiedad: Los ángulos opuestos por el vértice son congruentes.

Triángulos

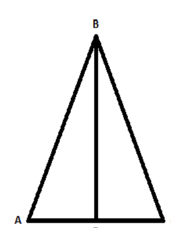
13. El punto medio de la hipotenusa de un triángulo rectángulo



a. Dibujar un triángulo rectángulo ABC cualquiera.
b. Encontrar el punto medio D de la hipotenusa AB a través de un plegado. Plegar la línea desde el punto medio D a C.
c. Comparar CD y BD plegando la bisectriz del ángulo BDC. ¿Cuál es la imagen de CD a través de una reflexión en esta bisectriz?

Propiedad: La medida de la mediana de la hipotenusa en un triángulo rectángulo es igual a la medida de la mitad de la hipotenusa.

14. Los ángulos de la base de un triángulo isósceles

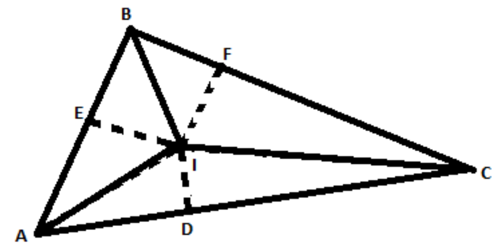


El triángulo isósceles ABC dado tiene los lados AB y BC congruentes. Plegar la línea BD perpendicular a AC. Comparar los ángulos A y C al plegar a lo largo de BD.
La imagen del ángulo A es un ángulo C reflejado en BD. ¿Cuál es la imagen del ángulo C? ¿Son congruentes los ángulos A y C?

Propiedad: Si dos lados de un triángulo son congruentes, entonces los ángulos opuestos a estos lados también lo son.

15. La intersección de las bisectrices de un triángulo

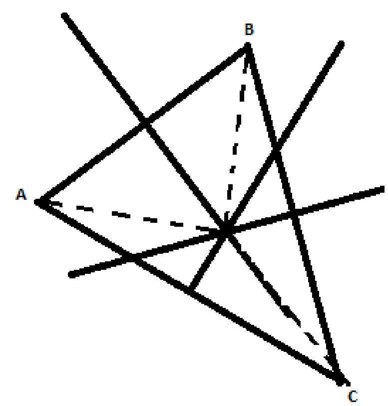
Plegar las bisectrices de cada ángulo de un triángulo dado. ¿Se intersecan las bisectrices en un punto en común? ¿Cómo se llama el punto de intersección de las bisectrices de los ángulos? Plegar las perpendiculares de cada lado que pasen por este punto. Comparar ID, IE e IF al plegar.



ID es la imagen de IF a través de la reflexión en IC. ¿Cuál es la imagen IE a través de la reflexión en IB? ¿Qué conclusiones se pueden sacar sobre ID, IE e IF?

Propiedad: Las tres bisectrices de los ángulos de un triángulo ABC se intersecan en el punto I, que equidista de los lados AB, BC y CA. (Ese punto se denomina **incentro**).

16. La intersección de las mediatrices a los lados de un triángulo



Plegar las mediatrices de cada lado de un triángulo acutángulo dado. ¿Cómo se llama el punto común de intersección de estas líneas? Plegar líneas desde este punto a cada uno de los vértices del triángulo. Comparar estas longitudes haciendo plegados.

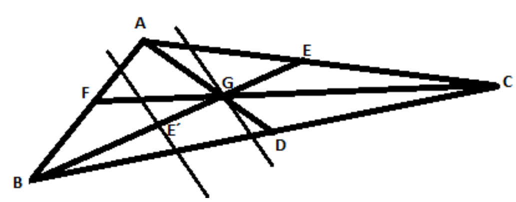
AN es la imagen de CN en la reflexión en ND. ¿Cuál es la imagen de NB en una reflexión en NE? ¿Qué conclusiones se pueden sacar sobre AN, BN y NC?

Definición: Las tres mediatrices de los lados de un triángulo ABC concurren en un punto que se denomina **circuncentro.**

Propiedad: Este punto equidista de los vértices A, B y C.

17. La intersección de las medianas de un triángulo

Bisecar los tres lados de un triángulo dado. Plegar líneas desde el punto medio de cada lado hasta el vértice opuesto. ¿Cómo se llama el punto de intersección de estas líneas? Tratar de balancear el triángulo colgándole un hilo en la intersección de las medianas.



Plegar una línea perpendicular a BE a través de G. E´es el punto sobre la mediana que coincide con E cuando el triángulo es plegado a lo largo de esta línea perpendicular. E´es la imagen de E en una reflexión en la línea perpendicular a BE a través de G. Si se pliega otra línea perpendicular a BE a través de E´, entonces, ¿cuál es la imagen de B reflejada en esta línea?

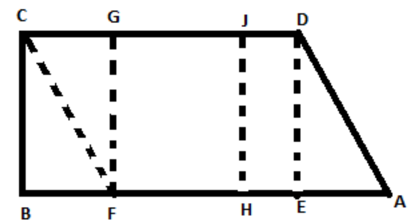
Repetir este mismo procedimiento para las otras dos medianas. ¿Qué se puede concluir sobre la posición de G en cada una de las tres medianas?

Definición: Las tres medianas de un triángulo concurren en un punto que se denomina **baricentro**.

Propiedad: su distancia a cualquiera de los vértices es 2/3 de la longitud de la mediana que pasa por ese vértice.
Propiedad: La mediana desde el vértice del ángulo incluido en los lados congruentes de un triángulo isósceles biseca ese ángulo y al lado opuesto del mismo.
Propiedad: Cualquier par de medianas de un triángulo equilátero son congruentes.
Propiedad: La mediana desde el vértice del ángulo incluido entre los dos lados congruentes de un triángulo isósceles es perpendicular al tercer lado.

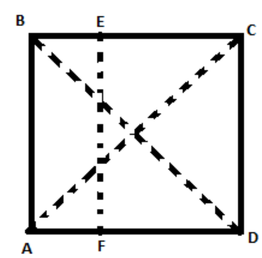
Cuadriláteros

18. El área de un paralelogramo

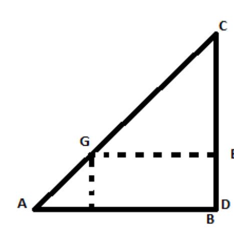


Recortar un trapecio rectángulo con el lado CB perpendicular a los lados paralelos. Por conveniencia el trapecio debe ser recortado de tal manera que la longitud de EF sea mayor que la longitud de FB. Plegar la altura DE. Plegar CF paralelo a AD. Plegar FG perpendicular a AB. Después de reflejar el triángulo FBC sobre la línea FG, hacer otro pliegue en HJ tal que B coincida con E y C coincida con D. Hacer coincidir F con A. ¿Son congruentes los triángulos ADE y FCB?
Matemáticamente, el efecto de reflejar el triángulo FCB en FG y luego en HJ es una reflexión deslizante o una traslación, en la dirección de B a E. ¿Por qué es apropiada esta terminología?
Cuando el triángulo FCB es plegado hacia atrás, ADCF es un paralelogramo. Cuando el triángulo ADE es plegado hacia atrás, DCBE es un rectángulo. ¿Tienen área equivalente el rectángulo BCDE y el paralelogramo ADCF? ¿Cuál es la fórmula para el área de un paralelogramo?
Propiedad: El área de un paralelogramo es el producto de las medidas de la base y la altura de esa base.

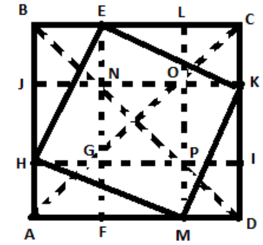
19. En un triángulo rectángulo el cuadrado sobre la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados sobre los otros dos lados (Teorema de Pitágoras)



Usar un cuadrado ABCD dado. Realizar un pliegue EF perpendicular a los lados AD y BC. Plegar las diagonales AC y BD. Doblar por la diagonal AC. Plegar el resultado (de doble espesor) a lo largo de GF y GE. Cuando el cuadrado es un sombrero abierto, se debe formar la línea HI. HI es la imagen de FE en una simetría axial respecto a AC.
Análogamente, plegando a lo largo de la diagonal BD se formarán las líneas JK y LM.



Plegar las líneas EK, KM, MH y HE. Sea la medida de EK = c, EC = a y CK = b. Entonces, comparar el área de EKMH con la suma de las áreas de NOPG y los cuatro triángulos ENK, OKM, MPH y HGE. Si esta ecuación está escrita en términos de a, b y c, entonces ¿cuál es el resultado?

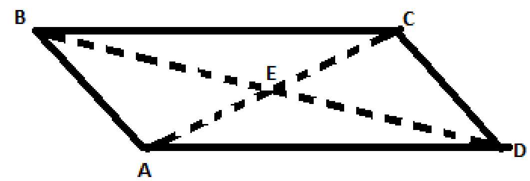


Propiedad: El cuadrado de la medida de la hipotenusa en un triángulo rectángulo es igual a la suma de los cuadrados de las medidas de los otros dos lados.

20. Las diagonales de un paralelogramo

Plegar las diagonales de un paralelogramo dado. Comparar las longitudes de BE y AE plegando la bisectriz del ángulo BEA.
¿Las diagonales tienen la misma longitud?

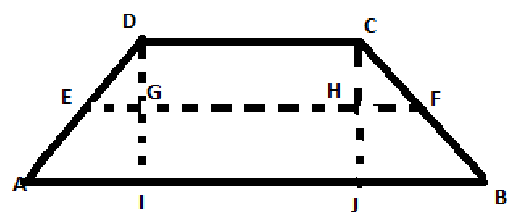
Plegar la perpendicular a ED que pasa por E. Comparar las longitudes de EB y ED plegando a lo largo de esta línea perpendicular. ¿Cuál es la imagen de D en la reflexión respecto a esta línea perpendicular? Repetir el mismo procedimiento para la otra diagonal AC. Las diagonales de un paralelogramo, ¿se bisecan entre sí?



Propiedad: Las diagonales de un paralelogramo se cortan en su punto medio.

21. La mediana de un trapecio

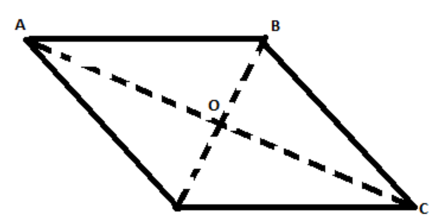
Plegar las alturas a ambos extremos de la base menor del trapecio ABCD. Bisecar cada lado no paralelo y unir estos puntos medios con un pliegue EF. Comparar DG y CH con GI y HJ respectivamente, al plegar a lo largo de EF. ¿Cuáles son las imágenes de DG y CH en la reflexión respecto de EF? ¿Cuál es la imagen de CD en esta misma reflexión? Plegar líneas perpendiculares a AB que pasen por E y F. ¿Cuáles son las imágenes de A y B reflejadas respectivamente en estas líneas perpendiculares? ¿Cómo es la suma de CD y AB comparada con la mediana EF?



Propiedad: El segmento que unen los puntos medios de los lados no paralelos de un trapecio es paralelo a las bases y su medida es la mitad de la suma de las medidas de las mismas.

22. Las diagonales de un rombo

Plegar las diagonales de un rombo ABCD dado. Comparar AO y BO con OC y OD respectivamente al plegar a lo largo de las diagonales. ¿Cuál es la imagen de AO en reflexión respecto de BD? ¿Cuál es la imagen del ángulo ABD en reflexión respecto de BD? ¿Qué conclusiones se pueden sacar respecto a las

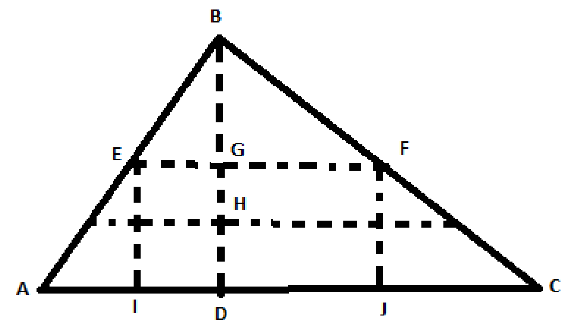


diagonales de un rombo? El triángulo ABD, ¿es congruente al triángulo CBD?
Propiedad: Las diagonales de un rombo son perpendiculares entre sí.

<u>Propiedades de triángulos</u>

23. Una base media de un triángulo

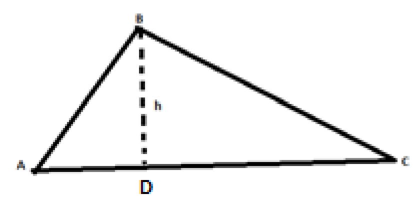
Bisecar dos lados del triángulo ABC. Plegar una línea EF a través de esos puntos medios. Plegar la altura respecto al lado no bisecado. Comparar BG y GD al plegar a lo largo de EF. ¿Cuál es la imagen de BG por una reflexión en EF? Bisecar GD. Plegar una línea perpendicular a BD a través de H. ¿Cuál es la imagen de EF en una reflexión sobre esta línea perpendicular? ¿Es EF paralela a AC? Plegar líneas perpendiculares a AC que pasen por E y por F. ¿Cuáles son las imágenes de A y de C cuando se reflejan en EI y FJ respectivamente? ¿Cómo es la longitud de EF respecto de AC?



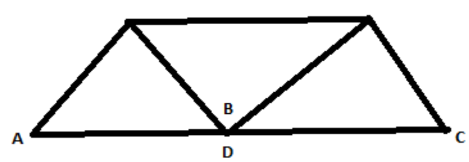
Propiedad: El segmento que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralelo al tercer lado y mide la mitad del mismo.

24. Suma de los ángulos interiores de un triángulo

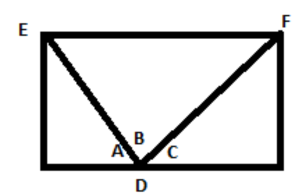
a. Plegar la altura BD del triángulo dado ABC.



b. Plegar el vértice B sobre la base de la altura D.
¿Cómo es la línea EF respecto de la línea AC?
¿Cómo se relacionan AE y EB?



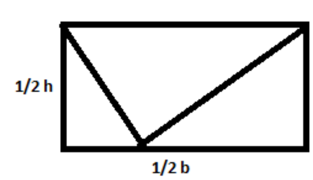
c. Plegar los vértices de los ángulos de la base A y C a la base de la altitud D. Los ángulos A, B y C, ¿forman una línea recta?



Propiedad: La suma de las medidas de los ángulos de un triángulo es 180°.

25. El área de un triángulo

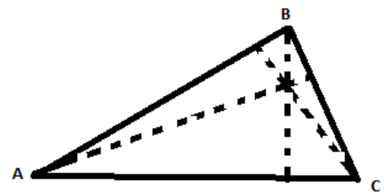
En la figura anterior, la forma rectangular tiene lados cuyas medidas son ½ de la base AC del triángulo ABC y ½ de la altura BD. ¿Cuál es el área del rectángulo? ¿Cómo están relacionadas las áreas de este rectángulo con el triángulo original? ¿Cuál es el área del triángulo?



Propiedad: El área de cualquier triángulo es igual a la mitad del producto de las medidas de cualquiera de sus bases y la altura correspondiente.

26. La intersección de las alturas de un triángulo

Plegar las alturas de cada lado del mismo. ¿Se intersecan en un mismo punto? ¿Cómo se llama el punto de intersección de las alturas? ¿Hay alguna relación entre las distancias desde el punto de intersección de las alturas a los vértices y bases del triángulo? Repetir el ejercicio para un triángulo obtusángulo.

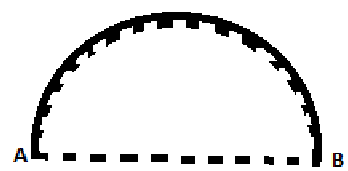


Definición: Las tres alturas de un triángulo se intersecan en un punto denominado **ortocentro**.

Relaciones correspondientes al círculo mostradas con plegado de papel

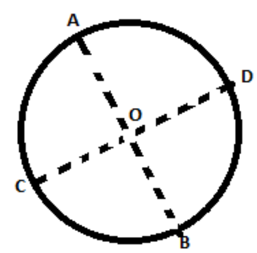
27. El diámetro de un círculo

Plegar el círculo sobre sí mismo. ¿La línea de pliegue AB, biseca el círculo? ¿Cómo se denomina esa línea AB? ¿Cuál es la imagen del círculo cuando se refleja en la línea AB?
Propiedad: El círculo tiene una simetría axial respecto de cualquier otro diámetro.



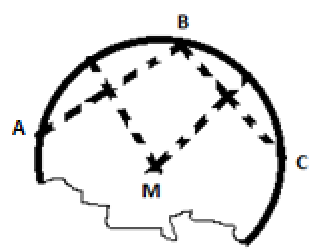
28. El centro de un círculo

Plegar dos diámetros perpendiculares entre sí. ¿Se bisecan los diámetros? ¿En qué punto se intersecan los diámetros? ¿Cuál es la imagen AO reflejada en CD?
Propiedad: El centro de un círculo es centro de simetría del mismo.



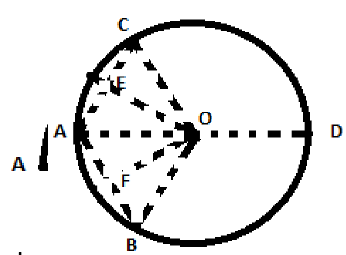
29. Encontrar el centro de un círculo cuando se tiene una porción del mismo que incluye el centro

Plegar una cuerda AB y una cuerda BC. Plegar la mediatriz de AB. Desde cualquier punto sobre esta mediatriz, la distancia a A es igual que la distancia a B. ¿Cómo se puede mostrar esto? Plegar la mediatriz de BC. Ésta interseca la otra mediatriz en M. ¿Qué se puede decir de AM, MB y MC? ¿Por qué es el centro del círculo?



30. Cuerdas y arcos iguales en el mismo círculo

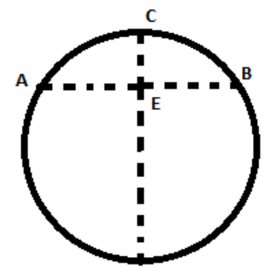
Localizar el centro O del círculo al plegar dos diámetros. Plegar el círculo a lo largo del diámetro AD. Desde algún punto C, plegar el semicírculo a lo largo de CO. Esto forma dos radios, CO y BO. ¿Cómo es AC respecto de AB? ¿Cuál es la imagen de AC reflejada por AD? Plegar las cuerdas AB y AC. ¿Cómo es la cuerda AC respecto de la cuerda AB? ¿Cómo es el ángulo central COA respecto del ángulo central AOB? Hacer un pliegue perpendicular a AC y a AB a través de O. Usando el plegado,



comparar AE con EC y AF con FB. ¿Cuál es la imagen de EC reflejada en EO? Contestar la misma pregunta para una reflexión en AD. Comparar EO con FO plegando a lo largo de AD. ¿Qué se puede generalizar sobre cuerdas iguales y arcos iguales en un mismo círculo?
Propiedad: En un círculo, los arcos menores de cuerdas congruentes son congruentes.

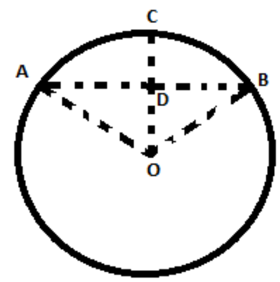
31. Un diámetro perpendicular a una cuerda

En un círculo recortado, plegar cualquier cuerda AB. Plegar un diámetro CD perpendicular a esta cuerda. Comparar los segmentos AE y EB de la cuerda dada. Comparar los arcos subtendidos AC y CB.
Propiedad: Un diámetro que es perpendicular a una cuerda biseca la cuerda.



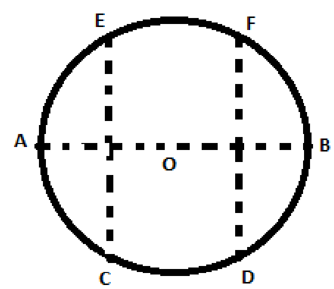
32. Un radio que biseca el ángulo entre dos radios

Plegar dos radios cualesquiera, AO y BO en un círculo recortado. Plegar la cuerda AB. Plegar la bisectriz OC del ángulo entre los radios AO y BO. ¿Cómo se relaciona la bisectriz del ángulo AOB con la cuerda AB? ¿Cuál es la imagen del arco AC reflejado a través de la bisectriz CO?
Propiedad: en un círculo, ángulos centrales congruentes intersecan arcos menores congruentes.



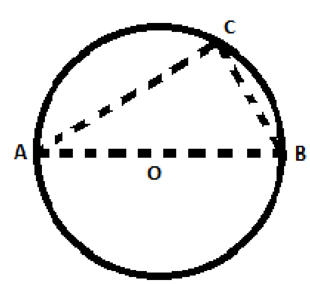
33. Arcos de un círculo intersecados por líneas paralelas

Plegar cualquier diámetro AB de un círculo con centro O. Plegar dos cuerdas, cada una perpendicular a AB. ¿Cuáles son las imágenes de E y F en una reflexión respecto a AB? Comparar los arcos EF y CD al plegar.
Propiedad: Si dos paralelas intersecan a un círculo, los arcos intersecados son congruentes.



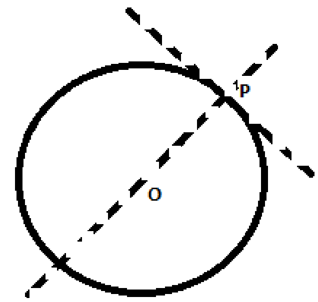
34. Ángulo inscripto en un semicírculo

Dado un círculo recortado, plegar el diámetro AB. Plegar una cuerda AC. Asimismo, plegar CB. ¿Cuánto mide el ángulo formado por las cuerdas AC y BC?
Propiedad: Un ángulo inscripto en un semicírculo es recto.



35. La tangente de un círculo en un punto dado de su circunferencia

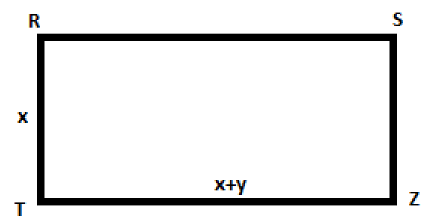
Dado un círculo, plegar el diámetro del mismo que pase por el punto dado P sobre la circunferencia. En P, plegar la línea perpendicular al diámetro. ¿Por qué la línea perpendicular es tangente al círculo? Si una tangente pasa por otro punto Q de la circunferencia, ¿qué se puede decir de la imagen de Q en una reflexión respecto al diámetro?
Propiedad: La tangente de una circunferencia es perpendicular al radio que pasa por el punto de contacto.



ÁLGEBRA A TRAVÉS DEL PLEGADO DE PAPEL

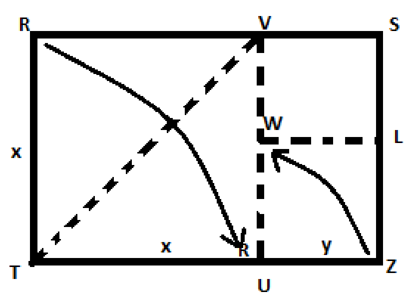
36. (ax + by) .(cx + dy)

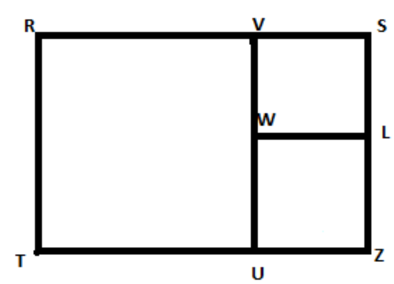
a. Sea cualquier hoja de papel rectangular que represente un rectángulo con dimensiones *x* y (*x*+*y*).



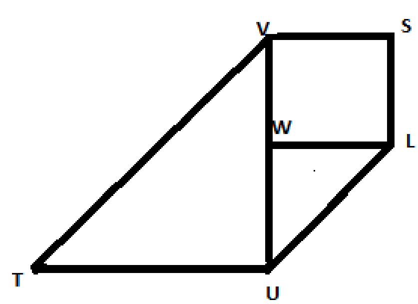
b. Para determinar *y*, plegar el vértice superior izquierdo hacia abajo hasta el borde inferior. Plegar a lo largo de VU. La medida de RT y UZ son x e y respectivamente. Plegar Z hasta el punto W sobre UV. Plegar a lo largo de UL.

(Tener en cuenta que UZ debe ser menor que UV en el rectángulo de papel, sino se va fuera de la hoja al hacer el pliegue sobre W).



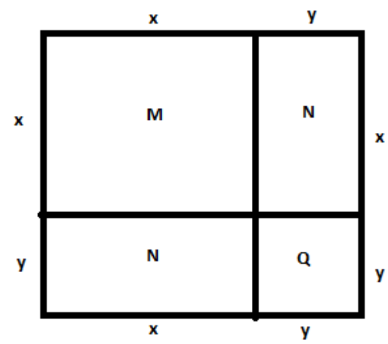


c. Desdoblar y volver al rectángulo original. RTVU es un cuadrado de lado x. UVSZ es un rectángulo con dimensiones x e y. UWLZ es un cuadrado de lado y.

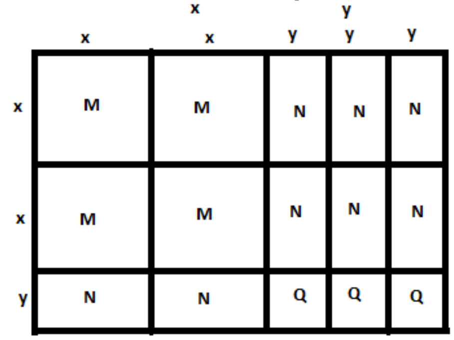


d. Cortar varios rectángulos modelo con lados x e y, y varios cuadrados con lados x y otros con lados y. Estos se necesitarán en las siguientes actividades. Por conveniencia, colorear una cara de los rectángulos modelo de rojo, azul o algún otro color brillante y dejar la cara opuesta de blanco.

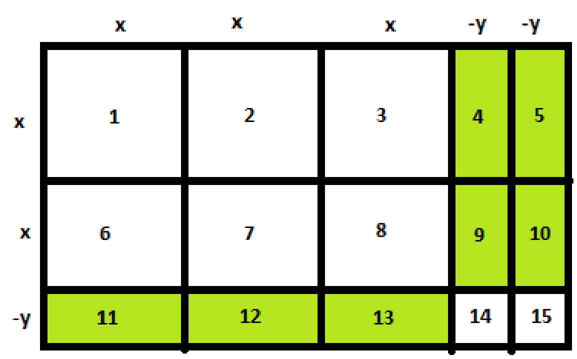
e. Ubicar los rectángulos y los cuadrados como se muestra en la figura. El cuadrado formado por M, N, N, y Q tiene por lado x+y. Su área es (x+y).(x+y). Como las áreas de M, N, y Q son x^2 ,x.y, e y^2 respectivamente, tenemos que (x+y).(x+y) = x^2 + x,y + x.y + y^2 = x^2 + 2xy + y^2.



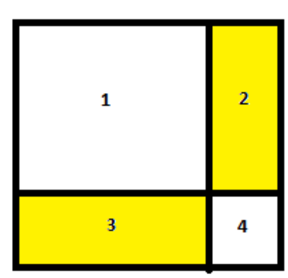
f. Matemáticamente, el área del rectángulo de esta figura es (2x + 3y).(2x + y). Sumando las áreas de las M, las N y las Q se obtiene que (2x + 3y).(2x + y) = 4M + 8N + 8Q =4x^2 + 8xy + 3y^2.



g. Supongamos que queremos encontrar el producto (3x + 2y).(2x – y). Acomodar los distintos rectángulos y cuadrados de tal manera que se forme un rectángulo que un lado mida 3x + 2y y el otro lado adyacente mida 2x + y. Para empezar, todos los rectángulos deben tener el lado blanco hacia arriba. Para representar 3x – 2y, invertir los rectángulos 4, 5, 9 y 10 y los cuadrados 14 y 15, exponiendo su cara de color. Para representar 2x – y, invertir los rectángulos 11, 12 y 13 y los cuadrados 14 y 15 de la misma manera. Ahora, los cuadrados 14 y 15 se invirtieron dos veces, exponiendo sus lados blancos otra vez. Los cuadrados 1, 2, 3, 6, 7, 8, 14 y 15 representan productos positivos. Los rectángulos 4, 5, 9, 10, 11, 12 y 13 representan, cada uno, el producto (–x). y. Así, (3x – 2y).(2x – y) = 6x^2 – 7xy + 2y^2.



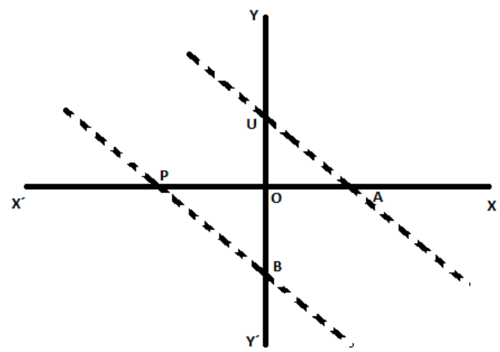
h. Suponer que se quiere hallar el producto (x + y).(x – y). De un modo similar al ejercicio anterior, acomodar los cuadrados y rectángulos de tal manera que formen un cuadrado de lado (x + y). Deben estar todos los rectángulos y cuadrados con su cara blanca hacia arriba. Para representar a (-y), invertir el rectángulo 2 y el cuadrado 4. Luego invertir el rectángulo 3 y el cuadrado 4. Dado que los rectángulos 2 y 3 representan productos de



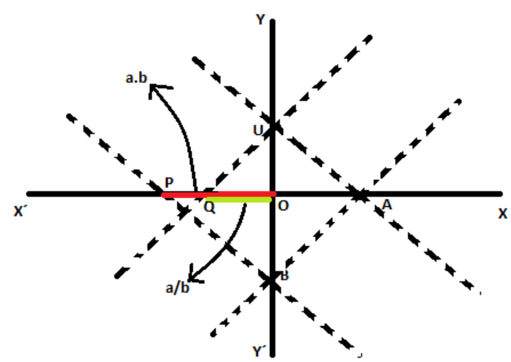
diferente signo, $(x + y).(x - y) = x^2 - xy + xy - y^2 = x^2 - y^2$. Los colores blancos representan el resultado.

37. Multiplicación y división entre a y b

Plegar dos líneas perpendiculares, X´X e Y´Y, que se intersecan en O. Plegar una serie de puntos sobre ambas líneas que estén a la misma distancia. Asegurarse de incluir a O entre los puntos. Estos puntos plegados formarán un sistema de coordenadas del plano en el papel. Sea OU = +1. Definir OA y OB como segmentos direccionales que representan a a y b respectivamente. Unir U con A plegando una línea a través de estos dos puntos. A través de B plegar una línea paralela a AU y sea P el punto de intersección de esta línea X´X. Ahora OP representa el producto de a y b en magnitud y signo. En la figura, a es positivo y b es negativo.

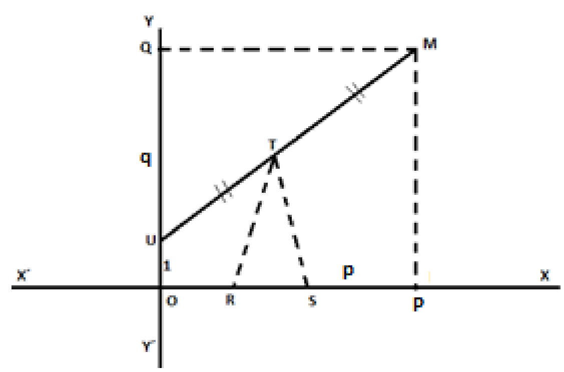


Plegar una línea que pase por A y por B. Plegar una línea que pase a través de U paralela a AB. Sea Q el punto de intersección de esta línea con X´X. Entonces OQ representa el cociente a/b en magnitud y signo.



38. Resolver la ecuación $x^2 - px + q = 0$, con p y q enteros

Plegar líneas perpendiculares X´X e YÝ que se intersectan en O. Plegar cada una de las líneas obteniendo puntos a igual distancia. OP y OQ representan p y q respectivamente. Plegar perpendiculares a X´X e Y´Y en P y Q, de tal manera que se intersecten en M. Plegar una línea determinada por M y U.



OU es la línea que representa a (+1). Ahora encontrar el punto medio de UM a través del plegado. Sea T este punto medio. Ahora reflejar U en alguna línea que pase a través de T de tal manera que la imagen de U esté sobre X´X(es lo mismo que trazar un círculo con centro en T y radio UT y que corte al eje XX´). Van a haber dos puntos si

$x^2 - px + q = 0$ tiene dos raíces reales distintas. Si estos dos puntos son R y S, entonces las medidas de OR y OS representan las raíces, tanto en magnitud como signo, de la ecuación. El procedimiento se ilustra usando la ecuación

$x^2 - 5x + 6 = 0$

Notar que OR = 2 y OS = 3 en medida.

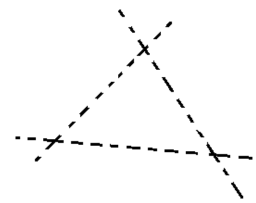
Se puede dibujar un círculo a través de Q, U, R y S. ¿Cómo se puede asegurar esto?

¿Por qué OR y OS deben ser representaciones de las raíces de la ecuación? (Si las raíces no son reales, el círculo nunca interseca al eje XX´)

CONSTRUCCIÓN DE ESTRELLAS Y POLÍGONOS

39. Triángulo

Plegar tres líneas cualesquiera no paralelas que se intersectarán en la hoja.

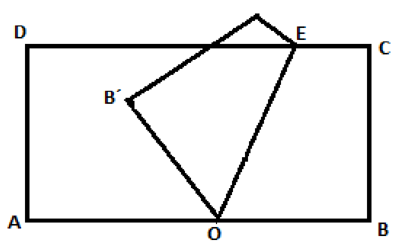


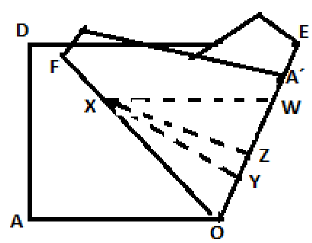
40. Hexágono regular, triángulo equilátero y estrella de tres puntas

Plegar y doblar un trozo de papel. Este doblez se muestra como AB en la figura. Desde algún punto O en AB plegar OE a la posición OB´de tal manera que el ángulo AOB´= ángulo B´OE. Los ángulos congruentes se obtienen fácilmente por medio de un transportador. También se pueden aproximar a través de un pliegue cuidadoso. Plegar OB tal que OA caiga en OE (ver la siguiente figura).

En esta figura, X Z es perpendicular a OE, y las medidas de OX y OW son iguales.

Cortando a lo largo de XW resulta un hexágono regular. Cuando el corte se hace a lo largo de XZ se obtiene un triángulo equilátero. Cortando a lo largo de XY resulta una estrella de tres puntas





Ver en el anexo un desarrollo más sencillo.

41. Triángulo equilátero

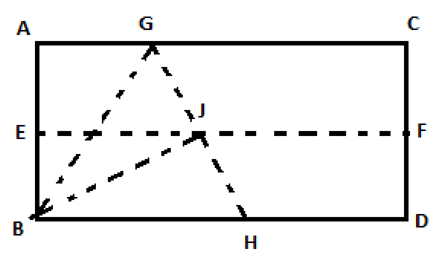
Dado un trozo de papel de forma rectangular (ABCD):

a. Plegar la mediana EF del rectángulo ABCD.

b. Plegar el vértice A sobre EF de tal manera que el doblez resultante GB, pase a través de B. Asignar como J la posición de A sobre EF. Volver a la posición original desdoblando.

Plegar la línea GJ extendiéndola hasta H.

c. Usando plegado, mostrar que BJ es perpendicular a GH.



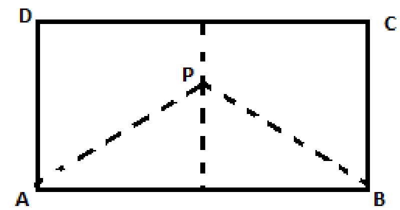
d. ¿Cuál es la imagen del ángulo GBJ a través de una reflexión sobre BJ? ¿Cuál es la imagen del ángulo ABG a través de una reflexión sobre BG?

e. Plegar la bisectriz del ángulo BGH y del ángulo GHB. ¿Qué conclusiones se pueden sacar después de hacer reflexiones sobre estos ángulos bisectores?

f. ¿Por qué el triángulo BGH es equilátero?

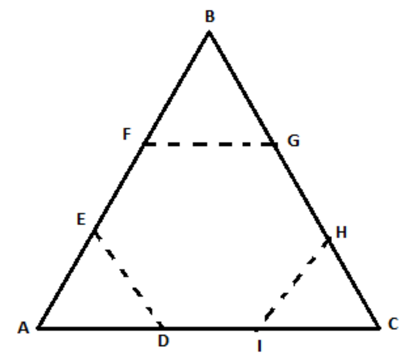
42. Triángulo isósceles

A partir de un trozo de papel rectangular ABCD, plegar por la mediatriz del lado AB del rectángulo ABCD. Desde cualquier punto P de esta perpendicular, plegar dos líneas a los vértices A y B. ¿Qué conclusiones se pueden sacar después de hacer una reflexión respecto a esta perpendicular? ¿Por qué el triángulo ABP es isósceles?



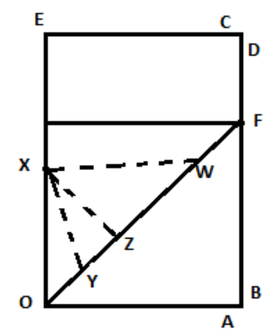
43. Hexágono

Dado un triángulo equilátero en una hoja de papel, plegar los tres vértices del mismo hacia el centro. ¿Cómo se encuentra el centro? ¿El hexágono DEFGHI es equilátero? ¿Cómo es el área del triángulo ABC con respecto al hexágono DEFFHI?



44. Octógono regular, cuadrado y estrella de 4 puntas

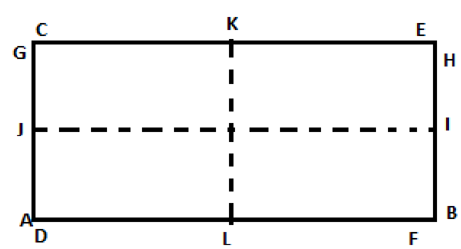
Plegar un trozo de papel por la mitad y doblar. Llamar AB a la línea resultante. Plegar la perpendicular bisectriz OE (mediatriz). Plegar OA y OB de tal manera que coincide con OE y doblar OF. Marcar un punto W tal que el triángulo OXW sea isósceles, y marcar el punto Z tal que XZ sea perpendicular a OF. Cortando a lo largo de XW resultará un octógono regular. Si se corta a lo largo de XZ se obtiene un cuadrado. Cortando a lo largo de XY se obtiene una estrella de 4 puntas.



45. Rectángulo

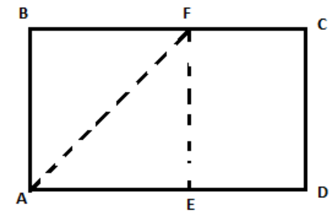
Plegar cualquier línea AB. En los puntos D y F sobre AB, plegar líneas perpendiculares a AB. En el punto G sobre CD, plegar una línea perpendicular a CD. Esta perpendicular intersecta a EF en H. Mostrar a través de un plegado que GH es perpendicular a EF.

Bisecar el lado EF a través de un plegado. Plegar una línea perpendicular a EF a través del punto medio I. Reflejando el rectángulo DFHC en la línea JI, ¿qué relaciones entre lados y ángulos aparece como verdadera? Plegar una línea perpendicular a GH a través del punto medio K. Reflejar el rectángulo DFHG y notar qué relaciones aparecen como verdaderas.



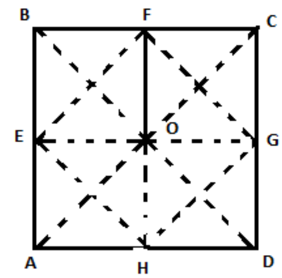
46. Cuadrado

Plegar un rectángulo tal que uno de los ángulos rectos se biseca (línea AF). Plegar FE perpendicular a AD. ¿Por qué ABFE es un cuadrado? ¿Cuál es la imagen de F reflejada en BE? ¿Cuál es la imagen de E reflejada en AF?



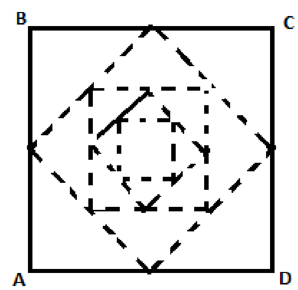
47. Otras relaciones en el cuadrado derivadas de reflexiones

Encontrar los puntos medios de los lados de ABCD a través de plegados. Plegar las diagonales AC y BD.
Plegar todas las líneas posibles determinadas por los puntos medios E, F, G y H (ver la figura).



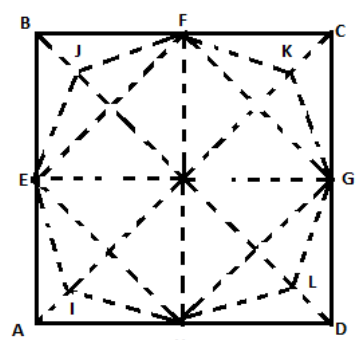
a. ¿Cuáles son las imágenes de B, F y C reflejadas en EG? De este resultado, ¿qué segmentos son congruentes?
b. ¿Cuál es la imagen del ángulo BOF reflejado en EG? En consecuencia, ¿qué ángulos son congruentes?
c. ¿Cuál es la imagen del ángulo FOC reflejado en AC? ¿Y en BD? ¿Y en FH?
d. ¿Cuál es la imagen de C reflejado en FG?
e. ¿Qué líneas se pueden mostrar que sean perpendiculares al plegar?
f. ¿Cómo se compara el área del cuadrado inscripto EFGH con el cuadrado original ABCD?

Si el área del cuadrado original ABCD es de 1 m^2, ¿Cuáles son las áreas de los otros cuadrados formados al plegar las esquinas hacia el centro?



48. Octógono

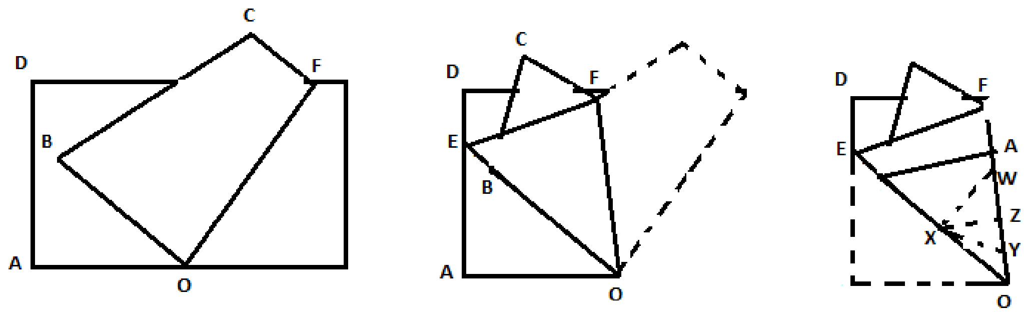
Plegar un cuadrado ABCD para obtener los puntos medios E, F, G y H. Plegar el cuadrado inscripto EFGH. A través del plegado, bisecar los ángulos formados por los lados del cuadrado original. Marcar los lados del cuadrado inscripto EFGH. Plegar las diagonales AC, BD, EG y FH. ¿Cuáles son las imágenes de los lados del octógono EJFKGLHI reflejados a través de las líneas AC, BD y EG? ¿Por qué EJFKGLHI es un octógono regular?



49. Decágono regular, pentágono regular y estrella de 5 puntas

Plegar un trozo de papel por la mitad y marcar. Llamar AB a esta línea. Si O es el punto medio de AB, plegar y marcar a lo largo de la línea OE tal que el ángulo AOB mida la mitad del ángulo BOF (primera figura). Esta relación entre ángulos se puede establecer con un transportador o haciendo un pliegue muy cuidadoso. Plegar OE tal que coincida con OB. Marcar la línea OF (segunda figura). Doblar a lo largo de OE tal que OA caiga a lo largo de OF (tercera figura).

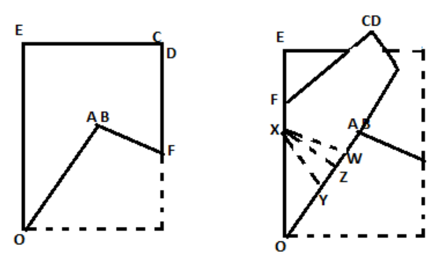
El triángulo OXW es isósceles. El triángulo OXZ es rectángulo. Cortando a lo largo de XW se obtiene un decágono regular. Cortando a lo largo de XZ se obtiene un pentágono regular. Una estrella de 5 puntas se produce cuando el corte se realiza a lo largo de XY.



50. Hexágono regular, dodecágono regular y estrella de 6 puntas

Plegar un trozo de papel por la mitad. Llamar a esta línea AB. Plegar A sobre C y marcar a lo largo de OE. Plegar A sobre B y marcar a lo largo de OF tal que el ángulo EOA sea congruente a AOF. La congruencia de estos ángulos se puede medir con transportador o plegando cuidadosamente. Marcar sobre OA, plegando OF para que caiga sobre OE. El triángulo OXW es isósceles, el triángulo OXZ es rectángulo. Cortando a lo largo de XW, XZ y XY respectivamente se obtiene un dodecágono regular, un hexágono regular y una estrella de 6 puntas.

Se pueden obtener interesantes copos de nieve cortando muescas en el diseño de la estrella de 6 puntas.

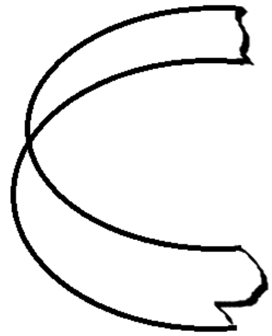


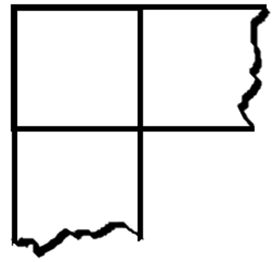
Polígonos construidos atando nudos de papel

51. Cuadrado

Usar dos tiras de papel del mismo ancho.

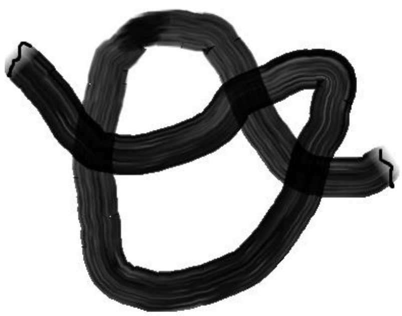
a. Plegar cada tira sobre sí misma tal que se forme un bucle y plegar. ¿Por qué los ángulos que se forman son rectos?
b. Insertar un extremo de una tira dentro del bucle de la otra tal que las tiras se entrelacen. Tirar de las tiras simultáneamente y que queden estrechas, cortar el excedente. ¿Por qué el polígono resultante es un cuadrado?

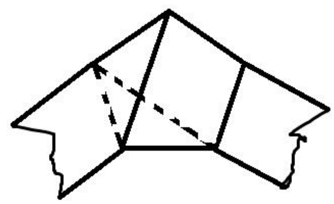




52. Pentágono

Usar una tira larga de papel de ancho constante. Hacer un nudo simple. Apretar el nudo y aplastar. Cortar los excedentes. Desdoblar y considerar el conjunto de trapezoides formados en los plegados. ¿Cuántos trapezoides se formaron? Comparar los trapezoides a través de plegados. ¿Qué conclusiones se pueden sacar sobre el pentágono obtenido?

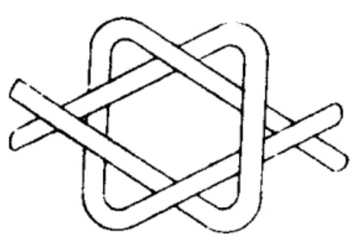


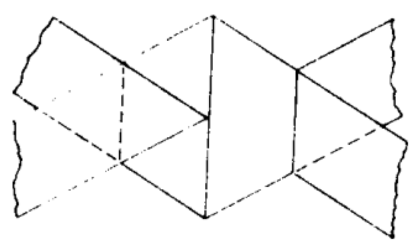


53. Hexágono

Usar dos tiras largas de papel de igual ancho. Atar un nudo cuadrado como se muestra en la figura.

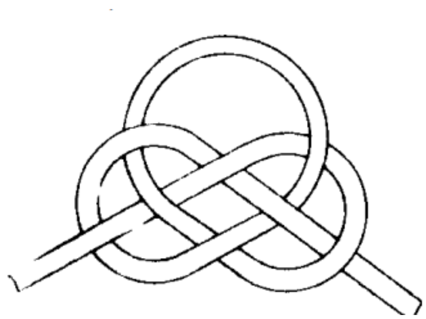
Apretar y plegar hasta que quede plano para producir un hexágono. Puede ser más fácil desatar el nudo y plegar cada pieza por separado como muestra la segunda figura. Después de apretar y aplanar, cortar las longitudes sobrantes. Desplegar y ver los trapezoides formados. ¿Cuántos trapezoides se formaron en cada tira? Comparar el tamaño de estos trapezoides.

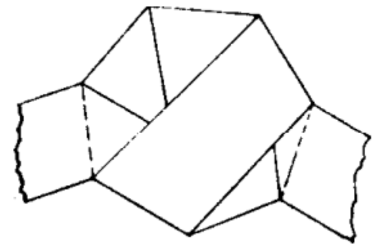




54. Heptágono

Usar una tira larga de ancho constante. Hacer un nudo como se ilustra en la figura. Apretar y aplastar. ¿Cuántos trapezoides se forman cuando se desarma el nudo?

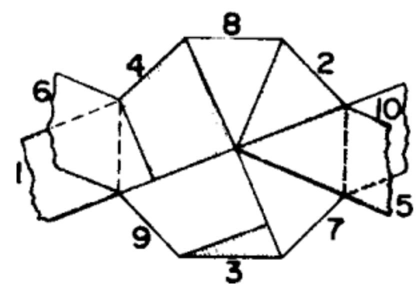




55. Octógono

Usar dos tiras del mismo ancho. Primero hacer un nudo simple suelto con una de las tiras como el del pentágono anterior. En la figura se muestra esta atadura con una tira sombreada que va desde 1-2-3-4-5. Con la segunda tira, empezando en 6, pasar por encima de 1-2 y por debajo de 3-4.

Doblar en 7. Pasar debajo de 4-5 y 1-2. Doblar en 8. Pasar debajo de 3-4 y 6-7. Doblar en 9. Pasar encima de 3-4, debajo de 1-8 y 4-5, emergiendo en 10. Apretar y aplastar.



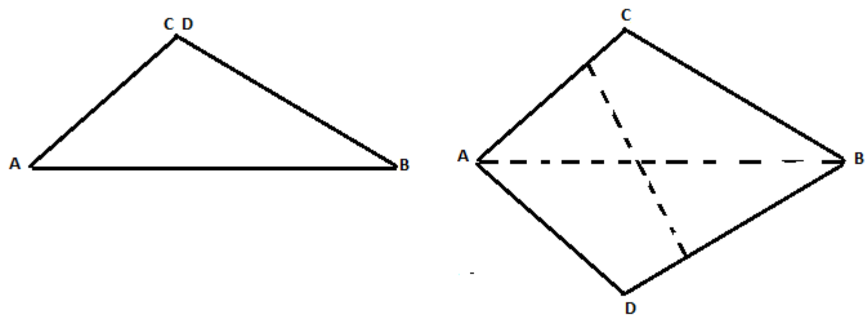
Cortar las longitudes excedentes 1, 5, 6 y 10.

Esta construcción no es fácil. Otra tarea podría ser analizar los nudos y sus trapezoides para determinar las longitudes y los tamaños de los ángulos involucrados. Usando un transportador, una regla y la información obtenida hará que las construcciones sean considerablemente más fáciles.

SIMETRÍAS

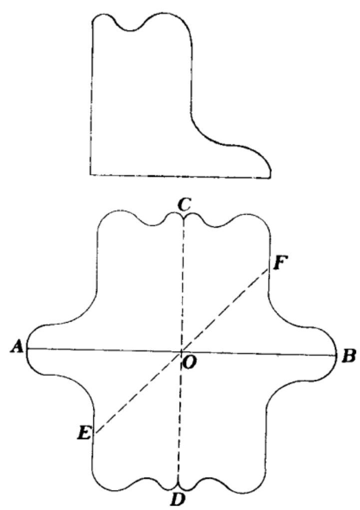
56. Simetría axial

Plegar una línea en una hoja de papel. Cortar una figura con forma de cometa como se ve en las imágenes. Plegar esta figura a lo largo de cualquier otra línea. ¿Qué diferencias se notan entre los pliegues de las dos líneas? El primer pliegue es un eje de simetría para la figura. ¿Cuál es la imagen de la figura en una reflexión sobre la primera línea de pliegue?



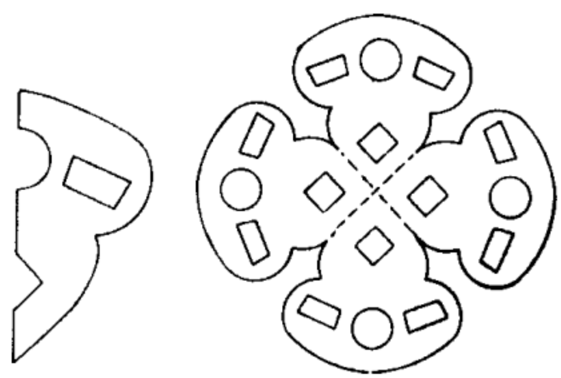
57. Simetría axial y central

Plegar dos dobleces perpendiculares. Dejando el papel plegado, cortar una curva plana con las tijeras. ¿Cuáles son las imágenes de la figura cuando se reflejan en AB y CD? Trazar una línea diferente a AB y CD. ¿Es EF un eje de simetría de la figura? ¿Cómo se puede mostrar? ¿Cómo se relaciona O con EF? Responder estas preguntas para varias posiciones de EF. El punto O es centro de simetría para la figura. ¿Por qué?



58. Diseño geométrico

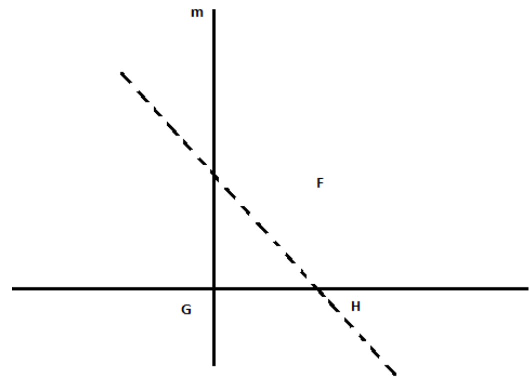
Plegar dos dobleces perpendiculares, dividiendo el papel en cuadrantes. Plegar una vez más, bisecando los ángulos rectos. Mantener el papel plegado.
Recortar el borde opuesto al ángulo de 45° tal que las partes plegadas sean iguales. Mientras el papel permanece plegado, cortar muescas y agujeros de formas extrañas. Asegurarse de dejar partes del borde intactas. Cuando se despliega el papel, aparece un diseño simétrico.



<u>SECCIONES CÓNICAS</u>

59. Parábola

Dibujar cualquier recta m como una directriz. Marcar un punto F fuera de la recta como el foco. Plegar una línea perpendicular a m. Marcar el punto de intersección dem y la perpendicular. Llamarlo G. Plegar el papel por encima tal que el punto F coincida con el punto G y doblar. Llamar H al punto de intersección de este pliegue y la línea perpendicular. Repetir esta operación 20 o 30 veces usando diferentes perpendiculares a m. El punto H estará sobre la parábola de foco F y directriz m. Los dobleces formado al plegar el punto F sobre G son tangentes a la parábola. Se dice que las tangentes "envuelven" la curva parabólica. ¿Cuál es la imagen de FH cuando se refleja en el doblez formado al hacer coincidir a F con G? ¿Qué hechos geométricos concernientes a tangentes a la parábola se pueden deducir? Imaginar que el interior de la curva parabólica es la superficie de un espejo. Rayos de luz, que son paralelos a las líneas perpendiculares a m, reboltan en el espejo. ¿Dónde se reflejan estos rayos de luz reflejados después de rebotar en el espejo?



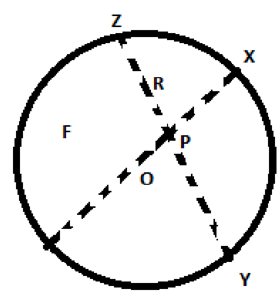
60. Elipse

Dibujar una circunferencia con centro O. Localizar un punto F dentro del círculo. Marcar un punto X sobre la circunferencia. Plegar el punto F sobre Xy doblar. Plegar el diámetro que pasa a través de X.

El punto de intersección de este diámetro y el doblez se denomina P. Repetir este procedimiento 20 o 30 veces eligiendo diferentes posiciones para X a lo largo de la circunferncia.

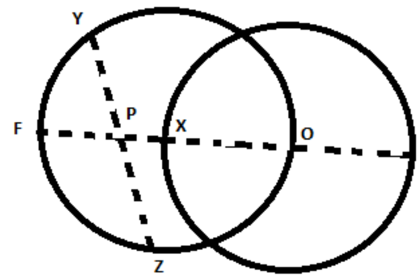
Cada doblez es tangente a una elipse con focos O y F. ¿Cuál es la imagen de PX reflejada en ZY? Mostrar que la medida de la suma de FP y PO es constante. Por lo tanto, P pertenece a la elipse, con O y F sus focos.

Imaginar que ZY es un espejo. ¿Por qué un rayo de luz que pasa por F y P se reflejan a través de O? Sea R cualquier punto a lo largo de ZY distinto de P. Mostrar que la suma de las medidas de FR y RO es mayor que la suma de las medidas de FP y Po. Repetir este procedimiento usando varias posiciones para F. ¿Qué efecto tiene esto sobre la elipse resultante?



61. Hipérbola

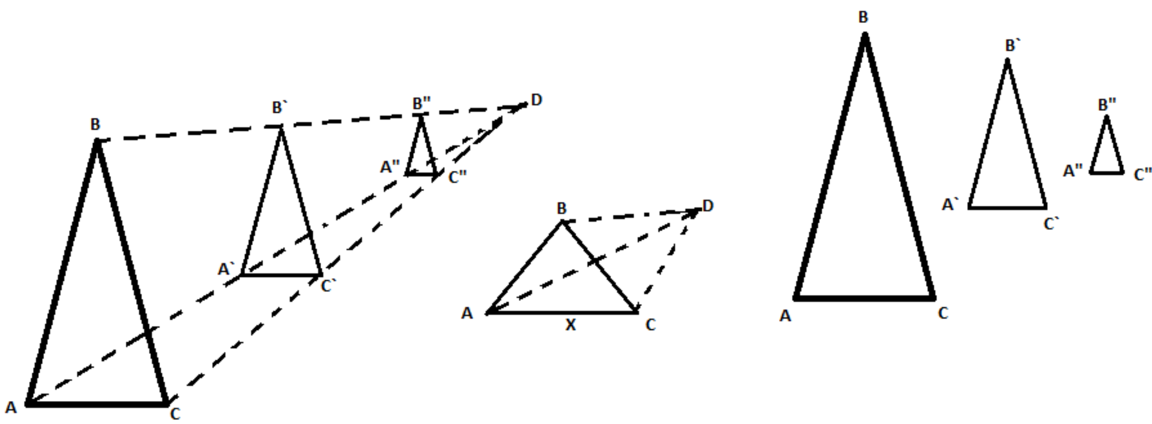
Dibujar una circunferencia con centro en O. Ubicar un punto F fuera de la circunferencia. Marcar un punto C sobre la circunferencia. Plegar F sobre X y doblar. Este doblez es tangente a la hipérbola con focos O y F. Plegar un diámetro a través de X. El punto de intersección del diámetro y el pliegue se denomina P. ¿Cuál es la imagen de FP en una reflexión en YZ? Mostrar que la diferencia de las medidas de FP y PO es constante. Por lo tanto, el punto P está sobre la hipérbola con focos F y O. Repetir este procedimiento 20 o 30 veces eligiendo diferentes posiciones para X a lo largo de la circunferencia.



Dibujar una circunferencia que tenga OF como diámetro. Incluir los puntos de intersección de los dos círculos entre los elegidos como posiciones de X. Los dobleces resultantes son asintóticos a la hipérbola. ¿Cuál es la imagen de la hipérbola reflejada en OF? ¿Cuál es la imagen de la hipérbola reflejada en una línea perpendicular a OF en el punto medio de OF?

62. TRANSFORMACIONES DE SEMEJANZA Y HOMOTECIA

a. Dibujar un triàngulo ABC. Marcar un punto D fuera del triàngulo. Plegar la lìnea AD. Plegar el punto D sobre A y doblar. El punto de intersecciòn de este doble y el enlace AD se denomina A`. Repetir el mismo procedimiento para los puntos B y C tal que se localicen los puntos B`y C`.



¿Cómo se relaciona el triángulo ABC con el A´B´C´? ¿Cómo se pueden comparar las áreas de estos dos triángulos?

b. Dibujar un triángulo ABC y un punto D fuera de él. Reflejar el punto n in una línea perpendicular a AD en el punto A. Repetir el mismo procedimiento con los puntos B y C tal que se localicen los puntos B´y C´. Hacer lo mismo con el punto X. ¿Dónde está el punto imagen X´? ¿Cómo se compara el triángulo A´B´C´con el triángulo ABC?

c. Dibujar un triángulo ABC y los puntos D y E exteriores a él. Usar el procedimiento del punto a. con el punto D para localizar A´B´C´. Repetir este procedimiento con el triángulo A´B´C´y el punto E para localizar el triángulo A"B"C". ¿Cómo se relaciona el triángulo A"B"C" con el triángulo ABC? ¿Cómo se comparan sus áreas? Plegar las líneas AA", BB" y CC". ¿Qué conclusiones se pueden obtener después de hacer estos pliegues?

Si dos àngulos de un triàngulo son congruentes a dos ángulos de otro triàngulo respectivamente, entonces los triàngulos son semejantes.

RECREACIÓN

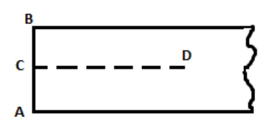
63. Cinta de Moëbius

Usar una tira de papel de por lo menos 1,5 pulgadas de ancho y 24 pulgadas de largo. Para hacer la cinta de Moëbius, darle media vuelta a uno de los extremos (180°) antes de pegarlo al otro extremo. Si se dibuja una marca ininterrumpida a lo largo de la tira, se regresará al punto de partida sin atravesar un borde. O sea, esta tira de papel tiene una sola superficie. Clavar la punta de una tijera en el centro del papel y cortan por todo el recorrido. Será sorprendente el resultado! Cortar la banda resultante por el centro para un resultado diferente. Después de dos cortes, cuántas bandas separadas se tienen?

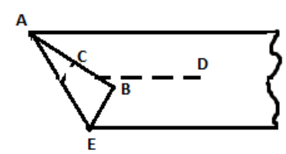
64. Hexaflexágono

El hexaflexágono requiere de tiras de papel que sean por lo menos seis veces su ancho en la longitud.

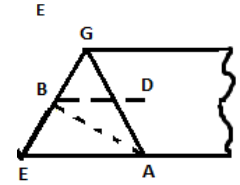
a. Primero plegar la tira para localizar la línea central CD desde un extremo de la tira.



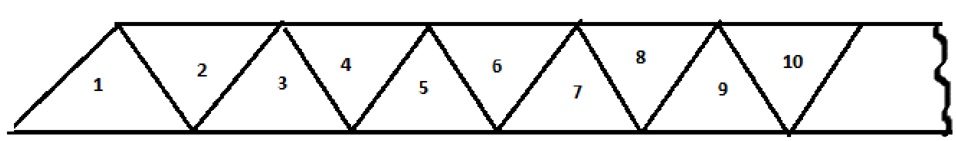
b. Plegar la tira tal que B caiga sobre CD y el doblez resultante AE pase a través de A. ¿Cuál será la imagen de A reflejada en BE? ¿Qué tipo de triángulo es ABE?



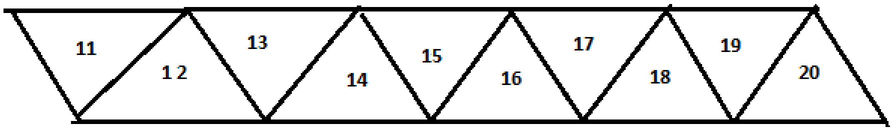
c. Plegar la tira de tal manera que el doblez EG caiga sobre BE. ¿Qué tipo de triángulo es EGA? A continuación plegar hacia adelante GA, formando otro triángulo. Continuar plegando hacia adelante y atrás hasta que se formen 10 triángulos equiláteros. Cortar el excedente de la tira como así también el primer triángulo rectángulo ABE.



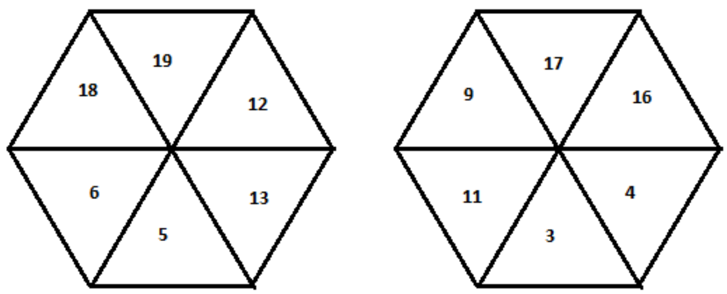
d. Dejar la tira en la posición mostrada en la figura y numerar los triángulos respectivamente.



e. Girar la tira y numerar como en la figura. Asegurarse que el triángulo 11 quede detrás del triángulo 1.



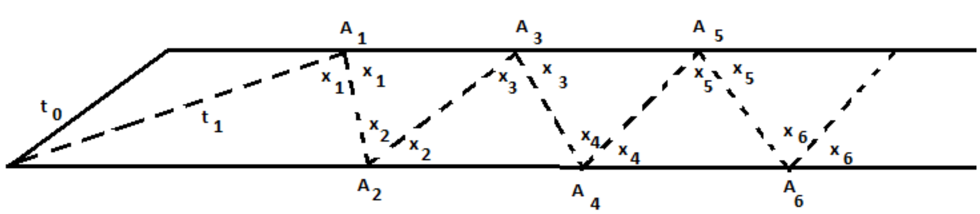
f. Para plegar el hexaflexágono, sostener la tira en la posición mostrada en la figura siguiente. Plegar el triángulo 1 sobre el 2. Luego plegar el 15 sobre el 14 y al triángulo 8 sobre el 7. Insertar la punta de la tira, triángulo 10, entre los triángulos 1 y 2. Si el pliegue muestra los arreglos obtenidos en las dos figuras siguientes, pegar el triángulo 1 sobre el 110. Si no, revisar las direcciones dadas.



El hexágono se puede plegar y abrir para mostrar una serie de diseños. Dos de estos diseños se ven en las figuras. El diseño abierto fácilmente al plegar en los tres bordes sueltos, así formando una estrella de tres puntas y abriendo el centro.
¿Cuántos diseños diferentes se pueden obtener?

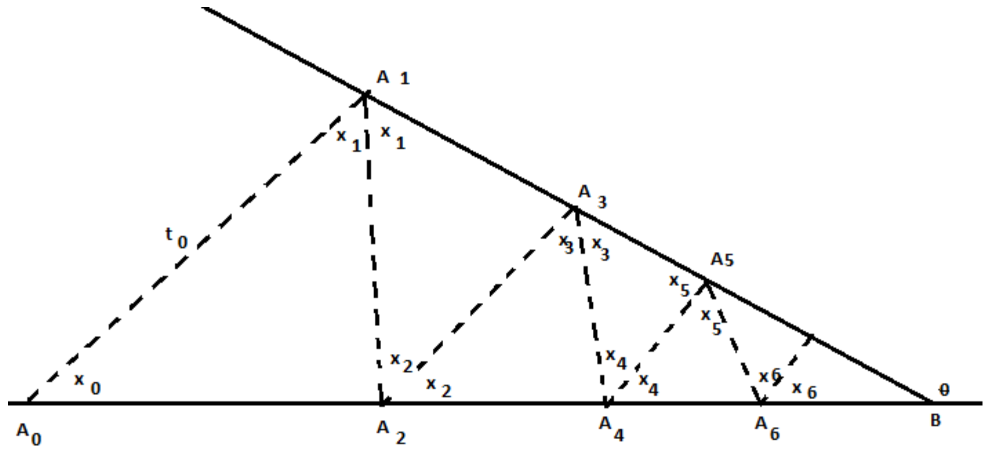
65. Aproximaciones al ángulo de 60°

Cortar una tira de papel de 2” de ancho y aproximadamente 20” de largo. Cortar un extremo de la tira y etiquetar la línea de corte t_0. Plegando, bisecar el ángulo formado por t_0 y el borde de la tira. Etiquetar la bisectriz como t_1 y los dos ángulos congruentes formados x_0. La línea t_1 intersecta el otro borde de la tira en A $_1$. Por plegado, bisecar el ángulo obtuso formado en A_1 por t_1 y el borde de la tira. Este proceso se continúa hasta que las longitudes de t_k y t_{k+1} son congruentes y los ángulos x_k y x_{k+1} son congruentes. Estos ángulos x_k se aproximan en medida a 60°. Es sorprendente que, no importante cuánto mida el ángulo x_0 al principio, los ángulos x_k siempre se aproximan a medir 60°.



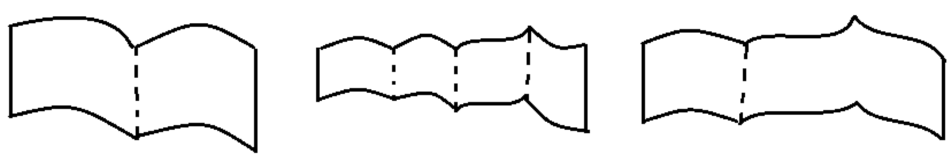
66. Trisecar un ángulo

Una interesante variación sobre el ejercicio 65 se realiza sobre un papel cuyos bordes rectos no son paralelos. En esta situación, el ángulo x_k se aproxima en medida a θ/3. Así, tenemos una forma de aproximación a la trisección del ángulo B. Por conveniencia, elegir A_0 tan lejos como se pueda de B. También, para asegurarnos una convergencia conveniente, elegir t_0 tal que x_0 es aproximadamente la medida de θ/3.



67. Curvas dragón

Tomar una tira larga de papel y plegarla por la mitad de derecha a izquierda. Cuando se abre tiene un doblez, que apunta hacia abajo. Doblar por la mitad dos veces desde derecha a izquierda. Cuando se abre aparecen tres dobleces. Leyendo de izquierda a derecha, los primeros dos puntos apuntan hacia abajo y el tercer punto apunta hacia arriba. Operando tres pliegues por la mitad, el patrón de dobleces (de derecha a izquierda) es AAOAAOO, donde A y O representan los dobleces que apuntan hacia arriba y hacia abajo respectivamente.



Después del enésimo pliegue, ¿cuántos rectángulos se forman y cuántos dobleces se forman? ¿Se puede determinar la secuencia de A_s y O_s para 4 pliegues por la mitad a partir de las secuencias que resultan de los tres primeros pliegues?

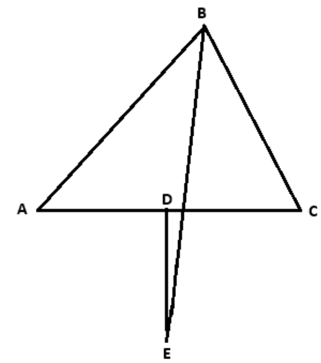
Modificar los pliegues anteriores alternando pliegues en los extremos desde izquierda a derecha y de derecha a izquierda. Las fórmulas para determinar el número de áreas y el número de dobleces formados después de n pliegues no cambiará, pero la secuencia de A_s y O_s usados para describir los dobleces sí cambiará. ¿Se puede notar cómo predecir el patrón para n + 1 pliegues, conociendo el patrón para n pliegues?

Otra interesante modificación es usar un pliegue de trisección en lugar de una bisección. Plegar la tira de modo que el patrón, después de un pliegue de trisección, es AO (última figura).

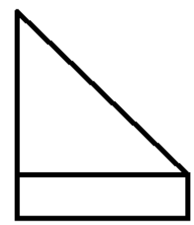
¿Cuántas áreas y cuántos dobleces se forman después de n plegados de trisección? ¿Se puede determinar la secuencia de A_s y O_s para cuatro pliegues de trisección, sabiendo la secuencia para tres pliegues de trisección?

68. Demostración de la falacia que todo triángulo es isósceles

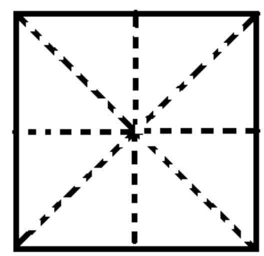
Plegar la bisectriz del ángulo C y la mediatriz de la base. Estos dobleces se intersecan fuera del triángulo, lo cual no es verdad si el triángulo es isósceles (se cortan sobre el lado desigual).



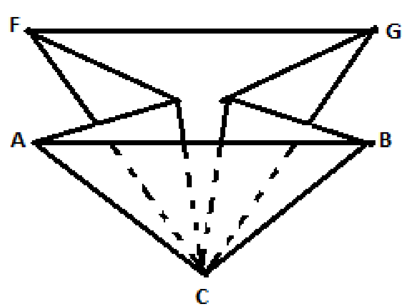
69. Cubo

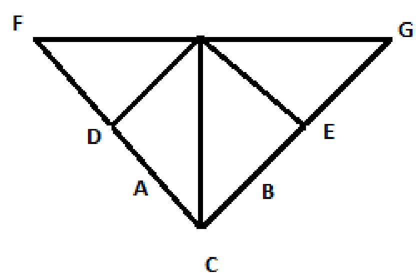


a. Plegar un trozo de papel hacia abajo para formar un cuadrado, y remover las tiras de exceso. El borde del cubo que se formará eventualmente será ¼ del lado de este cuadrado.
b. Plegar el papel de esquina a esquina y a través del centro en un sentido a través del punto medio de los lados. El pliegue a través del centro debe estar en la dirección opuesta de los pliegues esquina a esquina. Plegar la bisectriz del ángulo vértice y la mediatriz de la base. Estos dobleces se intersecarán fuera del triángulo, lo que contradice la suposición de que estas líneas se encuentran en el interior del triángulo.

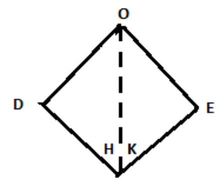


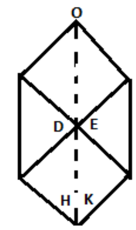
c. Dejar el papel plegado naturalmente en la forma mostrada en la tercera figura.
d. Plegar el frente A y B hacia el punto C (figura).



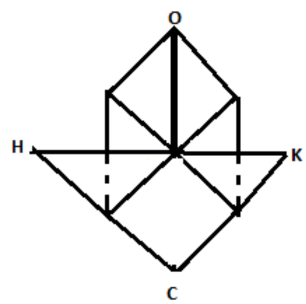


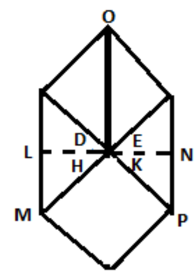
e. Voltearlo y hacer lo mismo para las esquinas de atrás F y G. Resultará un pequeño cuadrado.
f. Las esquinas sobre los lados D y E ahora son dobles. Plegar las esquinas D y E tal que se encuentren en el centro. Voltear el cuadrado y hacer lo mismo para las esquinas de la parte de atrás.



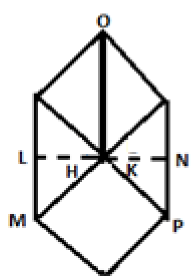


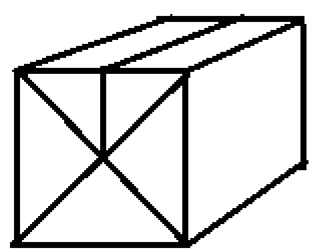
g. Un extremo de la segunda figura anterior estará libre ahora de perder esquinas. Plegar las esquinas perdidas en el extremo opuesto, H y K, hacia afuera en el frente para formarla la primera figura siguiente. Hacer lo mismo para las esquinas correspondientes de atrás.
h. Plegar los puntos H y K hacia el centro. Hacer lo mismo con los puntos de atrás de la forma (segunda figura).





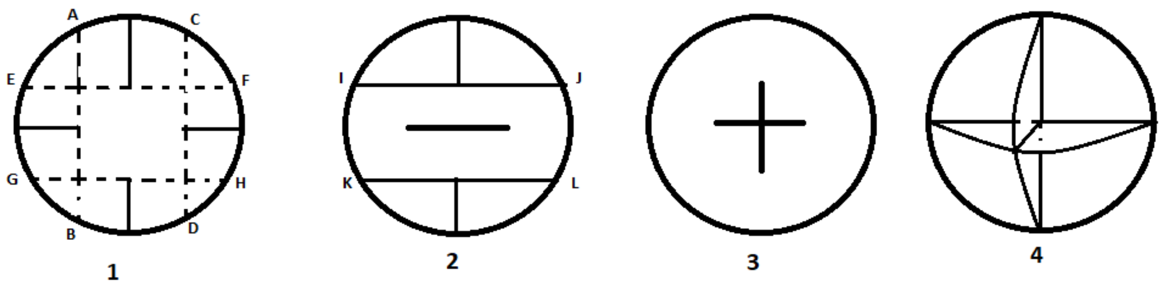
i. Abrir los pliegues D y E y meter los triángulos LHM y KNP dentro de los bolsillos en D y E. Hacer lo mismo con los puntos de atrás.
j. Soplar fuerte en el pequeño hoyo que se encuentra en O y el cubo se va a inflar. Doblar los bordes y el cubo estará terminado.





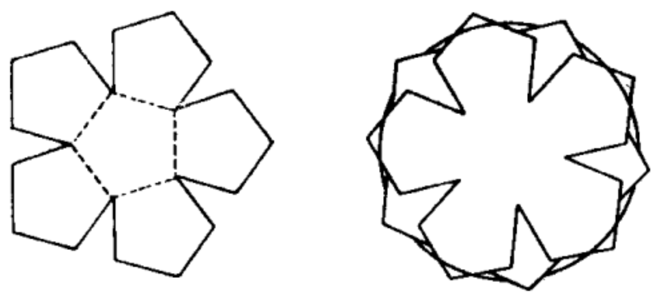
70. Un modelo de esfera

Cortar tres círculos iguales de un papel grueso. Cortar a lo largo de las líneas como se muestra en las figuras. Doblar los lados de la figura 1 uno hacia el otro a lo largo de la línea de puntos AB y CD y pasar este trozo a través del corte en el centro de la figura 2. Abrir la figura 1 después de hacerla atravesar por la figura 2. Doblar los lados de la figura 1 a lo largo de las líneas punteadas EF y GH y doblar la figura 2 a lo largo de las líneas punteadas IJ y KL. Pasar las dos figuras a través del corte con forma de cruz en la figura 3. Esto formara el modelo de esfera mostrado en la figura 4. Este modelo es apto para demostrar latitud y longitud, zonas de tiempo y triángulos esféricos. También se puede usar como decoración geométrica de árbol de Navidad o en un móvil. Si el modelo se hace de cartón, las figuras1 y 3 se deben cortar en dos semicírculos y meterlos en la figura 2.



71. Dodecaedro emergente

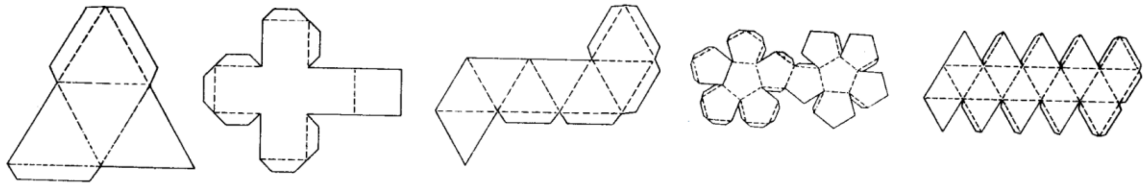
Cortar dos patrones de cartulina como se muestra en la primera figura. Plegar ligeramente a lo largo de las líneas punteadas. Ubicar estos patrones juntos como se muestra en la segunda figura y adjuntar con una banda elástica. Sacudir el modelo en el aire y se formará un dodecaedro. Si el primer intento no es exitoso, cambiar la banda elástica o usar otro tipo de cartulina.



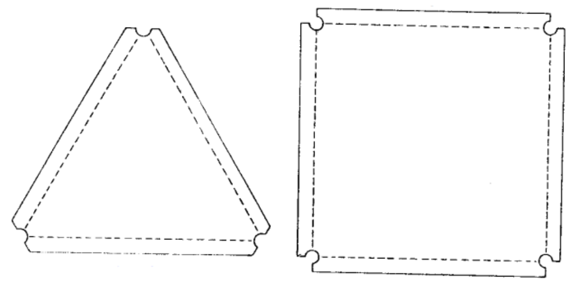
72. Patrones para poliedros

Costar los siguientes patrones en un cartón. Plegar a lo largo de las líneas punteadas. Usar las pestañas para pegar. Los poliedros estrellados se pueden hacer adjuntando pirámides a cada cara de estos poliedros regulares. Cada pirámide debe tener una base congruente a la cara del poliedro.

Una alternativa menos frustrante al método para construir poliedros de “pestañas y pegamento” es el “método de cartulina y banda elástica”. Para usar este método, cortar cada cara del poliedro en forma separada. En cada borde de estas piezas, cortar una pestaña estrecha con muescas en cada extremo y doblar hacia atrás. Sujetar las partes juntas a lo largo de las pestañas asegurándolas con bandas elásticas. Estirar las bandas a lo largo de las pestañas y asegurarlas en las muescas. Pestañas de ¼ de pulgada de ancho es lo óptimo para asegurar las bandas elásticas.



Se pueden hacer diferentes poliedros experimentado con polígonos regulares de tres, cuatro, cinco y seis lados. Por supuesto, todos estos polígonos deben tener bordes que sean de igual longitud.



Se pueden encontrar patrones para plegar una gran variedad de poliedros en las siguientes publicaciones:

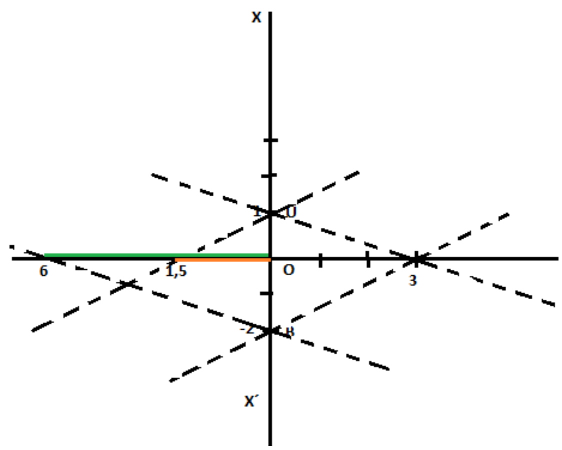
Cundy, H. M., and A. P. Rolette. Mathematical Models. 2nd ed. London: Oxford University Press, 1961.
Hartley, Miles C. Patterns of Polyhedrons. Chicago: The Author, 1945, (No longer in print.)
Stewart, B. M. Adventures among the Toroid's. Oscines, Mich.: The Author, 1970.
References on paper folding:
Barnett, I. A., "Geometrical Constructions Arising from Simple Algebraic Identities. 'School Science and Mathematics 38 (1938): 521-27.
Butts, Barbara B. "Cutting Stars and Regular Polygons for Decorations." School Science and Mathematics 50 (1950): 645-49.
Davits Chandler, and Donald Knuth. "Number Representations and Dragon Curvet; —I." Journal of Recreational Mathematics 3 (April 1970): 66-81.
Joseph, Margaret. "Hexahexaflexagrams." Mathematics Teacher 44 (April 1951): 247-48
Leeming, Joseph. Fun with Paper, Philadelphia: J. P. Lippincott Co., 1939.
Pedersen, Jean J. "Some Whimsical Geometry." Mathematics Teacher 65 (October 1972): 513-21
Row, T. Sundara. Geometric Exercises in Paper Folding. Rev. ed. Edited by W. W. Beman and D. E. Smith. Gloucester, Mass.: Peter Smith, 1958.
Rupp, C. A. "On a Transformation by Paper Folding." American Mathematical Monthly 31. (November 1924): 432-35.
Saupe, Ethel. "Simple Paper Models of the Conic Sections" Mathematics Teacher 48 (January 1955): 42-44.
Uth, Carl. "Teaching Aid for Developing (a + 6) (a — 6)." Mathematics Teacher 48 (April 1955): 247-49.
Yates, Robert C. Geometrical Tools. St. Louis: Educational Publishers, 1949. No longer in print.)
Since this publication is a revised edition of Donovan Johnson's classic Paper Folding for the Mathematics Class, a great deal of credit must go to him for providing so much of the inspiration and information that went into the making of this publication.

ANEXO

A continuación se presentan demostraciones y comentarios, a cargo de Adriana Rabino, de algunas de las propiedades mencionadas por el autor de este documento, como así también desarrollos más sencillos de polígonos a cargo de Oscar Bressan.

37. Multiplicación y división entre a y b

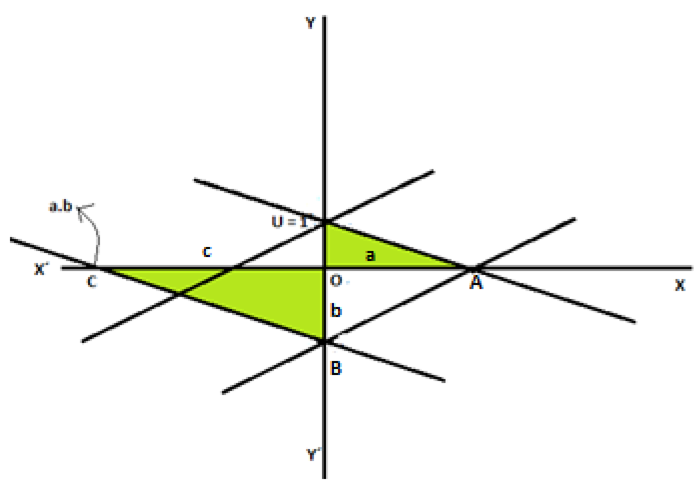
Ejemplo: Sean a = 3 y b = -2



Demostración (geométrica): para a.b

OA = a ; OB = b ; OC = c

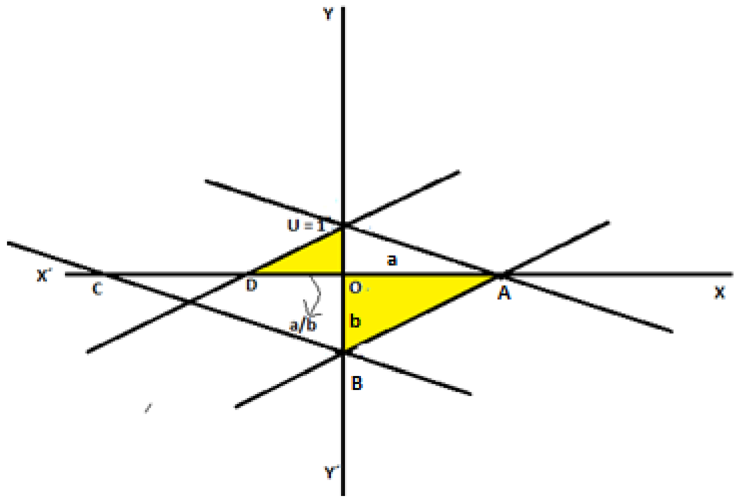
Los triángulos UOA y BOC son semejantes pues tienen dos ángulos correspondientes congruentes por opuestos por el vértice en O y dos ángulos correspondientes congruentes por alternos internos entre paralelas (cortadas por una transversal): <UAO y <OCB. Por lo tanto, al tener los tres ángulos correspondientes congruentes (el tercero por suplementario) dichos triángulos son semejantes, y por ende, sus lados son proporcionales.



Si OB = UO (1).b entonces OC =OA.b = a.b, por lo tanto c = a.b

Demostración para a/b
Análoga a la demostración anterior.

Los triángulos DUO y AOB son semejantes. Entonces: UO (1)= BO/b, por lo tanto DO = a/b

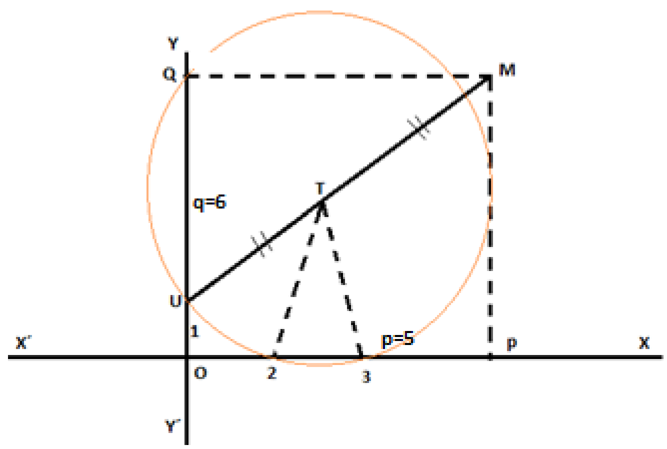


38. Resolver la ecuación $x^2 - px + q = 0$, con p y q enteros

Demostración (algebraica)
Para resolver la ecuación de 2° grado en forma algebraica $x^2 - px + q = 0$, se buscan las raíces o ceros de la ecuación a través de la fórmula de Bashkara, a saber:

$$x = \frac{p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

Entonces, basta con encontrar la ecuación del círculo, hacer la intersección con el eje de abscisas (si tiene raíces reales nos darán dos resultados) y llegar a la fórmula presentada anteriormente para demostrar que representan las raíces de la ecuación y que es la solución de $x^2 - px + q = 0$.



La ecuación del círculo es: $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = r^2$, donde (x_1,y_1) es el centro del círculo.
Para hallar las coordenadas del centro, se tiene:

$X_1 = p/2$

$$y_1 = \sqrt{r^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2} + 1$$

$$pero\; r = \frac{\sqrt{(q-1)^2 + p^2}}{2}$$

Entonces:

$$\boldsymbol{y_1} = \sqrt{\frac{(q-1)^2 + p^2}{4} - \frac{p^2}{4}} + 1 = \boldsymbol{\frac{q-1}{2} + 1}$$

Volviendo a la ecuación del círculo y reemplazando las coordenadas del centro y el radio, se tiene:

$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{q-1}{2} - 1\right)^2 = \frac{(q-1)^2 + p^2}{4}$$

Para que intersecte el eje de abscisas, y debe ser cero.
Despejando x de la ecuación, resulta:

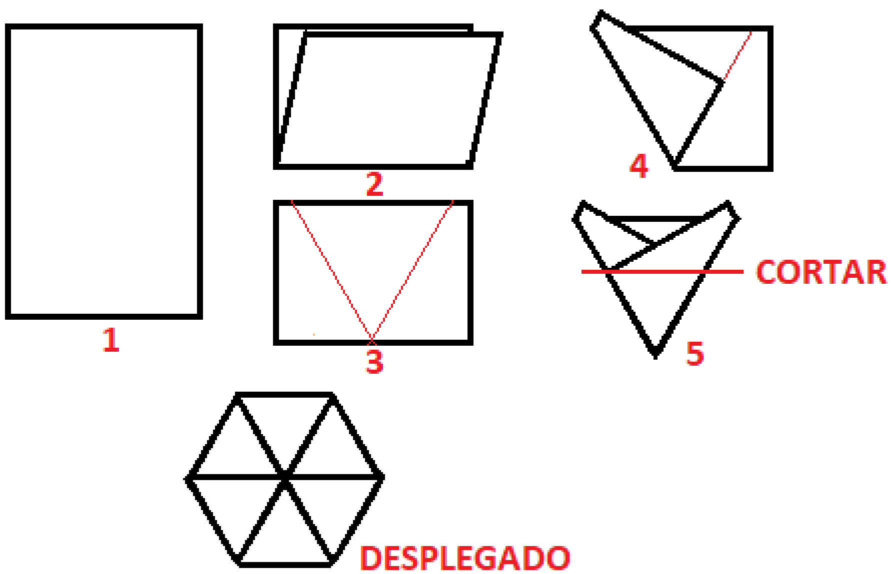
$$\left(x-\frac{p}{2}\right)^2 = \frac{(q-1)^2+\ p^2}{4} - \left(-\frac{q-1}{2}-1\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q - 1 - 1$$

$$=> x = \ \pm\sqrt{\frac{p^2}{4} - q + 1 - 1}\ + \frac{p}{2} = p\ \pm \frac{\sqrt{p^2-4q}}{2}$$

Queda así demostrado.

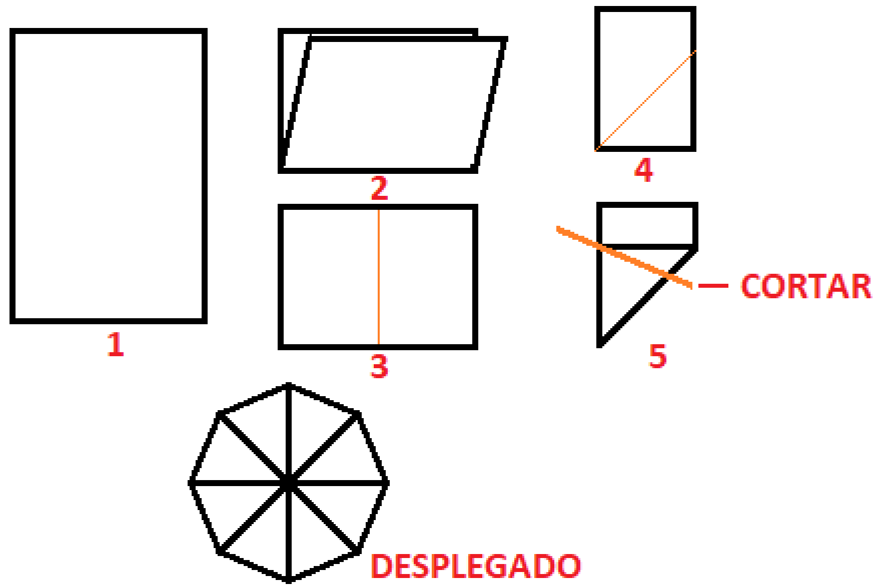
40. Hexágono regular

Dado un trozo de papel (fig.1), hacer un doblez como muestra la figura 2. Desde el punto medio de la base hacer dobleces como muestran las figuras 4 y 5. Cortar y desplegar.



48. Octógono regular

Octógono regular (adaptación) Plegar una hoja rectangular dos vece sucesivas como se muestra en las figuras 1, 2, 3 y 4. Luego cortar.


1
2
3
4
5
CORTAR
DESPLEGADO