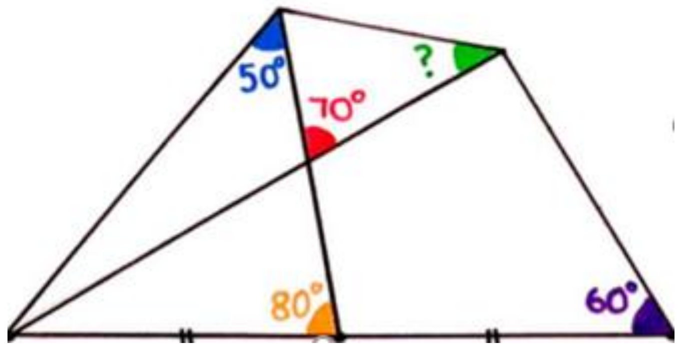
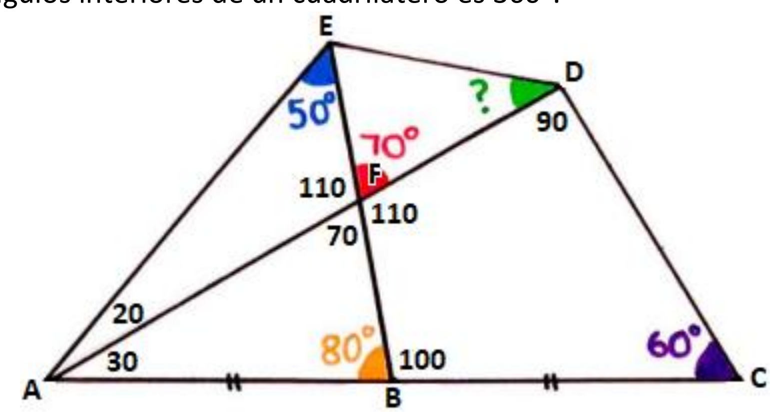
PROBLEMA DE ÁNGULOS

Oscar Bressan

¿Cuánto mide el ángulo verde?



Solución:
Le ponemos nombre a los puntos y valor a los ángulos en base a que son ángulos suplementarios, que la suma de los ángulos interiores de un triángulo que es 180° y que la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero es 360°.

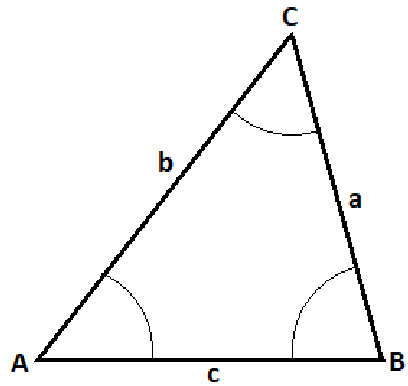


El problema no se resuelve teniendo en cuenta sólo los ángulos y el enunciado da una ayudita con un pequeño detalles que son las dos rayitas en los lados AB y BC que indican que

AB = BC

y sugiere que los lados también deben considerarse para lo cual debemos trabajar con la trigonometría de resolución de triángulos, para que en última instancia conozcamos los tres lados y los tres ángulos de un triángulo. Muchas veces conocer tres de estos seis datos nos permiten determinar los otros tres datos desconocidos, pero no siempre. Conocer los tres

lados nos permite determinar los tres ángulos, pero conocer los tres ángulos no nos permite conocer los tres lados.
Repasemos las fórmulas fundamentales. Sea el triángulo ABC:



A + B + C = 180°
a/sen A = b/sen B = c/sen C (fórmula del seno)
$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c \cos A$ (fórmula del coseno)
$b^2 = a^2 + c^2 - 2\,a\,c \cos B$ (fórmula del coseno)
$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b \cos C$ (fórmula del coseno)

Estas fórmulas se aplican para resolver los diferentes casos.
Supondremos que AB = BC = 10. Esto simplifica los cálculos y tiene importancia para determinar el ángulo FDE, que es lo que pide el problema.

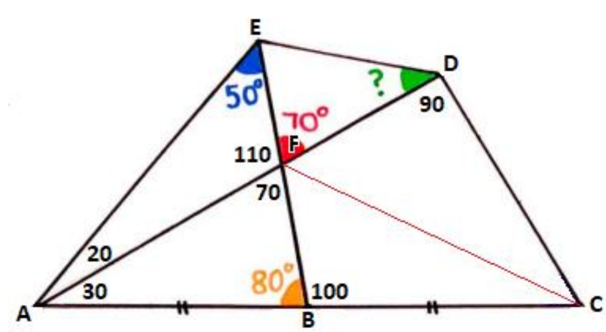
Resolución del triángulo ABF:

AB/sen 70° = 10/sen 70° = AF/sen 80° = BF/sen 30°
AF = 10*sen 80°/sen 70° = 10,480
BF = 10*sen 30°/sen 70° = 5,321

Resolución del triángulo AFE:

AF/sen 50° = 10,480/sen 50° = AE/sen 110° = EF/sen 20°
AE = 10,480*sen 110° /sen 50° = 12,856
EF = 10,480*sen 20° /sen 50° = 4,679

Dividimos el cuadrilátero BCDF en dos triángulos:



Resolución de triángulo BCF

$FC^2 = BC^2 + BF^2$ - 2 BC BF cos B = $10^2 + 5{,}321^2$ - 2*10*5,321 cos 100° =
= 100 + 28,313 - 2*10*5,321*(-0,1736) = 146,788\`
FC = 12,116
FC/sen B = BC/sen BFC = BF/sen BCF
sen BFC = (BC/FC) sen B = (10/12,116) sen 100° = 0,8128
BFC = 54° 22'
sen BCF = (BF/FC) sen B = (5,321/12,116) sen 100° = 0,4325
BCF = 25° 38'

Resolución del triángulo CDF:

DFC = BFD - BFC = 110° - 54° 22' = 55° 38'
FCD = 90 – 55° 38' = 34° 22'
FD/sen FCD = FC/sen FDC = FC (sen FDC = sen 90° = 1)
FD = FC (sen FCD/sen FDC) = 12,116 sen 34° 22' = 12,116*0,56449 = 6,8394
$DC^2 = FC^2 - FD^2$ (por ser un rectángulo)
DC = (12,116^2 - 6,8394^2)^(1/2) = 10,01

Resolución del triángulo DEF

FE = 4,679
FD = 6,8394
ángulo F = 70°

Por el teorema del coseno:

$ED^2 = EF^2 + DF^2$ - 2*EF*FD*cos 70° = 4.679^2 + 6.8394^2 - 2*4.679*6.8394*0,5 = 36,669
ED = 6,0555

Por el teorema del seno:

ED/sen 70° = EF/sen FDE
sen FDE = (EF/ED) sen 70° = (4,679/6,0555) 0,9397 = 0,7261
FDE = 46° 34'

Y esta es la solución: el ángulo verde FDE mide 46° 34'

¿Puedes encontrar otra manera? Envíanos a Contactos en www.gpdmatematica.ar