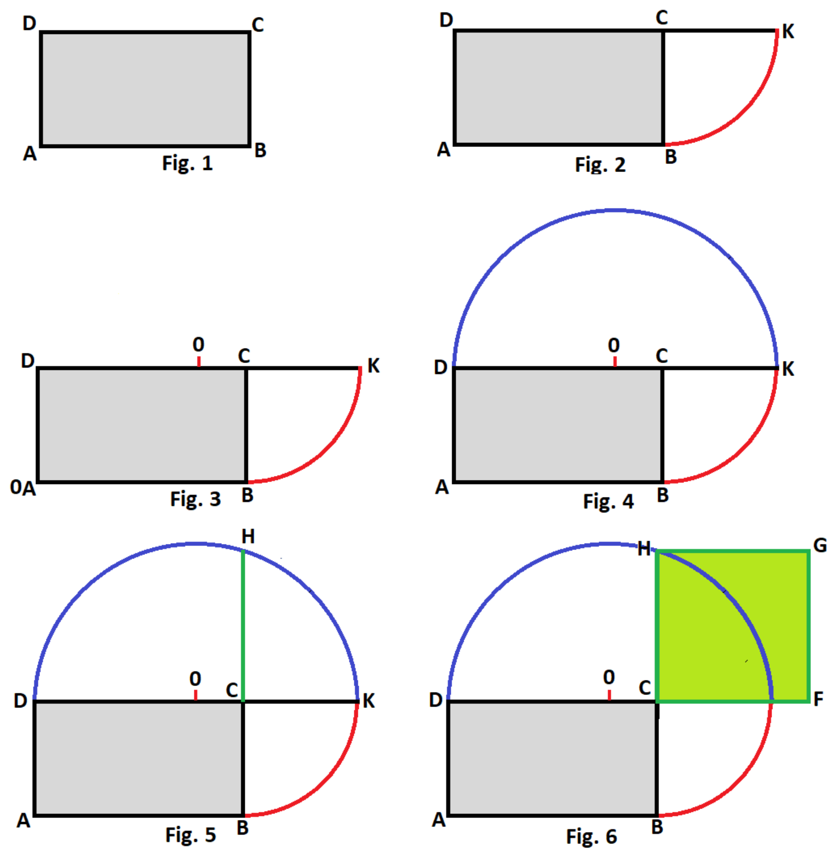
UN HOMENAJE A EUCLIDES

Oscar y Ana Ma. Bressan

Problema: Dado un rectángulo (ABCD en la figura 1) encontrar un cuadrado de la misma superficie (CFGH en la figura 6) usando sólo regla y compás. La regla no debe tener ninguna escala, sólo sirve para trazar líneas rectas.

Demostración geométrica de Euclides:



Explicación: Primero se prolonga la recta CD en una longitud igual a BC con la ayuda de un compás (fig. 2). De este modo tenemos el segmento DK y se determina el centro O (fig. 3) (la determinación del centro se hace con compás).

Tomando centro en O se traza una semicircunferencia de radio DO = OK (fig. 4). Luego se prolonga el segmento BC hasta intersectar a la circunferencia en el punto H (fig. 5).

Entonces, **el segmento CH es el lado del cuadrado que tiene igual superficie que el rectángulo ABCD (fig. 6).**

Demostración analítica:

Vamos a demostrar que la superficie del cuadrado CFGH es exactamente igual a la del rectángulo ABCD. Para la demostración vamos a usar geometría analítica, que comenzó con la geometría cartesiana desarrollada por Descartes 2.000 años después de Euclides.

El segmento

$DK = AB + BC$ (fig. 3)

y el radio

$DO = \frac{1}{2} DK = \frac{1}{2} (AB + BC)$ (fig. 3).

El segmento

$OC = AB - DO = AB - \frac{1}{2} (AB + BC) = AB - \frac{1}{2} AB - \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} AB - \frac{1}{2} BC$ (fig. 3).

Por Pitágoras

$OC^2 + CH^2 = OH^2 = DO^2$ (fig. 5)

esto es

$(\frac{1}{2} AB - \frac{1}{2} BC)^2 + CH^2 = [\frac{1}{2} (AB + BC)]^2$

Desarrollando:

$\frac{1}{4} AB^2 - \frac{1}{2} (AB)(BC) + \frac{1}{4} BC^2 + CH^2 = \frac{1}{4} AB^2 + \frac{1}{2} (AB)(BC) + \frac{1}{4} BC^2$

La superficie del cuadrado CFGH = CH^2 resulta (simplificando):

$CH^2 = (AB)(BC)$ (fig .6)

La superficie del rectángulo ABCD es (AB)(CD) y vemos que es igual a la superficie del cuadrado de lado CH.

¡Euclides, nuestras felicitaciones!