APLICACIÓN DE LA PROBABILIDAD GEOMÉTRICA

Oscar Bressan

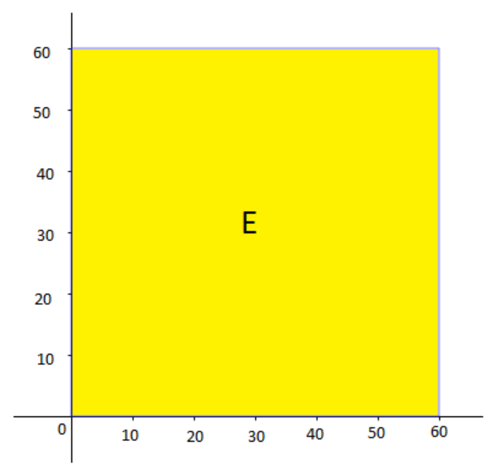
Amelia se dirige al museo de arte, tiene su tarde libre en el trabajo y como queda muy lejos de su casa decide ir en colectivo para aprovechar más tiempo en el museo.

Si toma el colectivo entre las 15 y las 16 horas, y llega a la parada y el colectivo ya ha pasado, seguramente tendrá que esperar 10 minutos porque esa es su frecuencia y solo permanece 2 minutos en cada parada antes de continuar su recorrido

¿Cuál será la probabilidad de que Amelia pueda tomar el colectivo?

Posible solución:

Para resolver este problema podemos recurrir a un sistema de ejes coordenados “x” (abscisa, tiempo de llegada de Amelia) e “y” (ordenada, tiempo de llegada del colectivo). Ambos valores pertenecen a un intervalo cerrado [0,60] minutos ya que entre las 15 y 16 hs. hay 60 minutos.



Si consideramos un par de puntos (x, y) “x” tiempo de llegada de Amelia a la parada e “y” tiempo de llegada del colectivo a la parada, gráficamente todos los posibles resultados están en este diagrama:

Todos los probables resultados están en el cuadrado amarillo que podemos escribir:

$$E = [0,60] \times [0,60] = \{(x, y) \in R^2 / x \in (0,60)\ e \in (0,60)\}$$

Luego tenemos el primer evento: “*Amelia llega a la parada*”

Se sabe que el colectivo espera 2 minutos en dicha parada, por lo que ella deberá llegar dentro de esos 2 minutos. Es decir “x” el tiempo de llegada de Amelia debe ser menor o igual al tiempo de llegada del colectivo más los dos minutos de espera, en símbolos:

$x \leq y + 2$ o su expresión equivalente $y \geq x - 2$ luego tenemos:

Evento Amelia llega a la parada = $A_1 = \{(x, y) \in E / y \geq x - 2\}$

El segundo evento: "*Amelia espera el colectivo*"

Amelia espera el colectivo como máximo por 10 minutos, por lo que no puede llegar más de 10 minutos antes que el colectivo, es decir x debe ser mayor o igual al tiempo del colectivo "y" más 10 minutos, en símbolos: $x \geq y - 10$ o su expresión equivalente $y \leq x + 10$

Evento Amelia espera el colectivo = $A_2 = \{(x, y) \in E / y \leq x + 10\}$

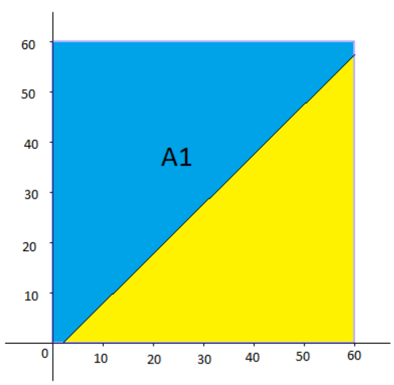
De lo planteado anteriormente obtenemos dos desigualdades:

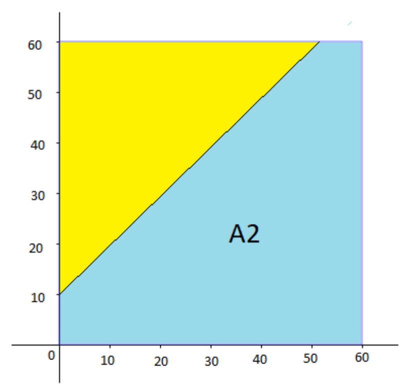
$$A_1 : y \geq x - 2$$

$$A_2 : y \leq x + 10$$

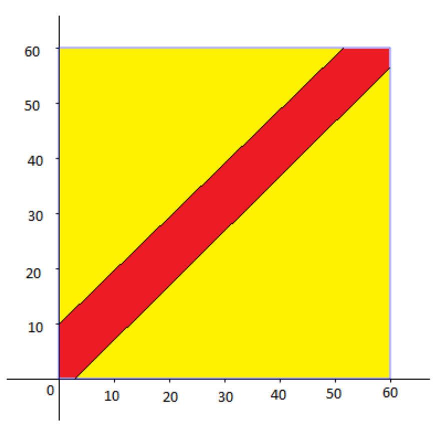
Además $0 \leq x \leq 60$ y $0 \leq y \leq 60$

Gráficamente:





Intersecando ambas regiones obtenemos donde Amalia y el colectivo coinciden: $A1 \cap A2$



Y podemos utilizar la probabilidad geométrica para obtener la solución: Si tomamos una región del plano para la cual su área está perfectamente definida, se puede construir una medida de probabilidad, que es la proporción entre su área "$A1 \cap A2$" y el área "E".

De esto definimos que la probabilidad de que Amelia y el colectivo coincidan viene dada por:

$$P(A1 \cap A2) = \frac{Área\ (A1 \cap A2)}{Área\ (E)}$$

Vemos que $\acute{A}rea\ (A1 \cap A2) = \acute{A}rea\ (A2) - \acute{A}rea\ (A1)$ y $\acute{A}rea\ (E) = 60.60 = 60^2 = 3600\ u^2$

$\acute{A}rea\ (A1 \cap A2) = \acute{A}rea(E) - (\acute{A}rea(T1) + \acute{A}rea(T2))$ (Siendo T1 y T2 las áreas de los triángulos que limitan la faja del plano producto de la intersección):

$T1 = \frac{58.58}{2} = \frac{58^2}{2} = 1682\ u^2$ y $T2 = \frac{50.50}{2} = \frac{50^2}{2}$=1250 u^2

Realizando las sustituciones correspondientes tenemos:

$$P(A1 \cap A2) = \frac{\acute{A}rea\ (A1 \cap A2)}{\acute{A}rea\ (E)} = \frac{\acute{A}rea\ (E) - \acute{A}rea\ (T1) - \acute{A}rea(T2)}{3600\ u^2}\ \frac{(3600 - 1682 - 1250)u^2}{3600\ u^2} = \frac{668}{3600} = \mathbf{0,18\widehat{5}}$$

¡Qué es la probabilidad buscada!!

Si aplicamos propiedades de los sucesos podemos escribir:

$$P(A1 \cap A2) = 1 - P((A1 \cap A2)^C)$$

$$P((A1 \cap A2)^C) = \frac{\frac{50^2}{2} + \frac{58^2}{2}}{60^2} = \frac{5864}{2.3600} = \frac{5864}{7200}$$

$$P(A1 \cap A2) = 1 - \frac{5864}{7200} = 0{,}18\widehat{5} = 18{,}5\ \%$$

A continuación , un ejemplo similar extraído de Martín Carrasco. Clase 2*: Probabilidades geométricas. 29 de junio de 2019.* Facultad de Ingeniería. Universidad de la República.Uruguay. (se recomienda leer el texto completo https://eva.fing.edu.uy/pluginfile.php/305140/mod_folder/content/0/02_probabilidades_geometricas.pdf?forcedownload=1

Los duelos en la ciudad de Los Apurados rara vez son fatales. Allí, cada contendiente llega en un momento aleatorio entre las 5 a.m. y 6 a.m. en el día pactado y sale exactamente 5 minutos más tarde, honor servido, a menos que su oponente llegue dentro ese intervalo de tiempo y peleen. ¿Qué fracción de duelos terminan en violencia?

Solución: Llamemos T1 y T2 los tiempos de llegada de los contendientes. Entonces, T1 y T2 son números al azar en el intervalo [5, 6]. Más aún, si miramos el punto de coordenadas (T1, T2) en el cuadrado [5, 6] × [5, 6], es un punto al azar que corresponde al modelo uniforme en dimensión dos que vimos arriba.

Es decir, las probabilidades se resuelven calculando áreas. Llamemos V al evento “el duelo termina en violencia”. Notar que los dos contendientes se encontrarán si, y solo si la diferencia de tiempos |T1 − T2| ≤ 1/12 (1/12 corresponde a 5 minutos en la escala horas). Entonces V = n (T1, T2) ∈ [5, 6] 2 : |T1 − T2| ≤ 1/12o . Este evento se muestra en la Figura 2. La probabilidad de V es por definición P (V) = Area(V) Area(Ω) = Area(V), ya que el área de Ω es 1. De la figura vemos que el área de V c es (11/12) 2 , por lo que **P (V) = 1 − (11/12) 2 ≈ 1/6**

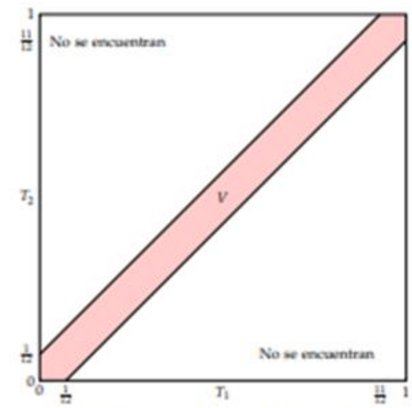


Figura 2: El evento *V* es la franja diagonal sombreada en rojo.