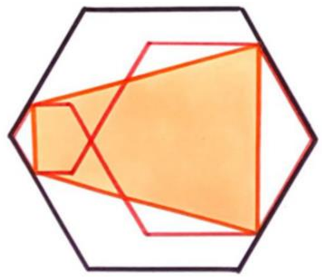
PROBLEMA DE LOS TRES HEXÁGONOS

Oscar y Ana Bressan

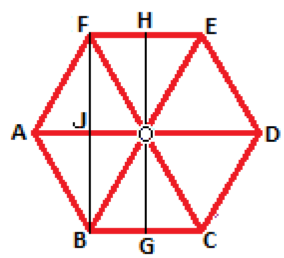


Tenemos tres hexágonos regulares de distintos tamaños. ¿Puedes encontrarlos?

¿Qué fracción del hexágono más grande está coloreada?

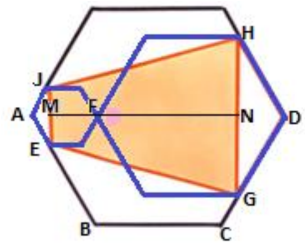
Solución:

Vamos a utilizar algunas propiedades de los hexágonos en función de su lado AB = ℓ.



AB = ℓ
AD = 2 ℓ
JD = $^3/_2$ ℓ
G0 = $[\ell^2 - (½\ \ell)^2]^{½} = \ell\ (\sqrt{3})/2$
GH = FB = ℓ $\sqrt{3}$
Perímetro = 6 ℓ
Superficie = $3\ \ell^2\ (\sqrt{3})/2$

Dado que el problema no aporta datos sobre los tamaños relativos de los hexágonos debemos suponer que lo que se pide es válido para cualquier configuración, pero esto hay que demostrarlo.



Sea ℓ_G = BC la longitud del lado del hexágono grande, ℓ_C = AE la del hexágono chico y ℓ_M = GD la del hexágono medio. Entonces

$$JE = \ell_C \sqrt{3}$$
$$HG = \ell_M \sqrt{3}$$
$$MN = {}^3/_2\, \ell_C + {}^3/_2\, \ell_M = = {}^3/_2\, (\ell_C + \ell_M)$$

La superficie sombreada de la figura superior es:

$$\text{Superficie EGHJ} = MN \times (JE + GH)/2 = {}^3/_4 \sqrt{3}\, (\ell_C + \ell_M) \times (\ell_C + \ell_M) = {}^3/_4 \sqrt{3}\, (\ell_C + \ell_M)^2$$

Además, tenemos que

$$AD = 2\,\ell_G = 2\,\ell_C + 2\,\ell_M \quad \Rightarrow \quad \ell_G = \ell_C + \ell_M$$

$\therefore$

$$\textbf{Superficie EGHJ} = {}^3/_4 (\sqrt{3})\, (\ell_C + \ell_M)^2 = {}^3/_4 (\sqrt{3})\, \ell_G^2$$

La superficie del hexágono grande es:

$$\textbf{Superficie hexágono grande} = {}^3/_2 (\sqrt{3})\, \ell_G^2$$

De modo que hemos encontrado que **la superficie coloreada es exactamente la mitad de la superficie del hexágono grande, y esto es así para cualquier configuración,** como por ejemplo la de las tres figuras que siguen a continuación: