# LA HERENCIA DE PIT-ERRAFÍN

Dicen que dicen que en el oriente lejano existió uno de los magos más extraordinarios del que se tenga conciencia. Su nombre era Pit-errafÍn y uno de sus mayores logros fue crear una caja mágica que se mantuvo en secreto aún después de su muerte. Se sabe que esta caja fue heredada por uno de sus discípulos que superó un difícil desafío. De allí en adelante se perdió todo rastro y si bien aún hoy en día hay gente que cree que en algún lado está, resulta más racional suponer que por alguna fuerte divergencia entre los herederos ha sido destruida.

Si ponían en esta caja un cierto número de monedas de oro de por lo menos 18 quilates, al día siguiente se encontraban **más monedas**, todas iguales, generadas por la caja. La cantidad que se generaba dependía de la cantidad de monedas que se ponía. Por ejemplo, si se ponían "a" monedas al día siguiente aparecían "b" monedas y siempre aparecían "b" si se ponían "a".

Pero había una segunda etapa con otra propiedad realmente curiosa. Si se ponían las "b" monedas generadas en la primera etapa, entonces el segundo día aparecían "c" monedas tal que *c = 3 a*, o sea que triplicaban la cantidad de monedas que se habían puesto originalmente.

$a \rightarrow b \rightarrow c = 3a$ donde siempre $a < b < c$

Además, si se aumentaba "a" entonces aumentaba "b":

$a + 1 \rightarrow b' \rightarrow 3(a + 1)$ y siempre.....$b' > b$

Un inconveniente crítico de la caja es que, si las monedas de oro eran de menor calidad que 18 quilates la caja eliminaba para siempre a esas monedas, cosa que ocurrió por lo menos dos veces.

Alguna gente cree que eso puede haber sido el origen de la divergencia que generó la posible destrucción.

Hasta aquí el enunciado de este hecho milagroso. Solo falta agregar que ha trascendido como rumor cuál fue el desafío que Pit-errafÍn les impuso a sus discípulos para determinar quién era el heredero de la caja. Pit-errafÍn habría dicho:

**"Uno sabe perfectamente cuántas monedas le pone a la primera etapa ("a") y también sabe perfectamente que en la tercera etapa ("c") habrá 3 veces las monedas que puso en a. El heredero de la caja es el primero que me diga cuántas monedas habrá en la segunda etapa ("b") si yo pusiera inicialmente 1.000 monedas."**

## Solución: BÚSQUEDA DEL PATRÓN

***Oscar Bressan***

Podemos expresar como leyes del comportamiento de la caja:

1ª LEY: La caja tiene un comportamiento unívoco. Para un cierto número de monedas hay una sola respuesta.

2ª LEY: La cantidad de monedas que se generan en la cada etapa **es mayor** que la que había en la etapa anterior, de modo que $a < b < c$

3ª LEY: La cantidad de monedas es una función **monótona creciente** en el sentido de que si con "a" se generan "b" entonces si crece "a" también crece "b".

4ª LEY: Si se ponen "a" monedas en una primera etapa se generan "b" monedas y si se ponen "b" monedas en una segunda etapa siempre se generan "c = 3 a" monedas de modo que $a \rightarrow b \rightarrow c = 3a$

Queremos encontrar una solución general, o sea cuánto será "b" para cualquier número inicial "a". Para ello buscamos un **patrón** (regularidad) en el problema. Comenzamos estudiando los valores más bajos para ver qué ocurre.

Sea $a = 1$ entonces $c = 3$, y como siempre $a < b < c$ no queda más remedio que sea $b = 2$:

$$a = 1 \rightarrow b = 2 \rightarrow c = 3$$

Aquí aprendemos que cuando ponemos una moneda la caja las convierte en dos, y también aprendemos que cuando ponemos dos la caja las convierte en tres. Entonces teniendo en cuenta la cuarta ley:

$$a = 2 \rightarrow b = 3 \rightarrow c = 6$$

$$a = 3 \rightarrow b = 6 \rightarrow c = 9$$

$$a = 4 \rightarrow b = ? \rightarrow c = 12$$

$$a = 5 \rightarrow b = ? \rightarrow c = 15$$

$$a = 6 \rightarrow b = 9 \rightarrow c = 18$$

Cuando se ponen 4 monedas, b debe de ser mayor que 6 y menor que 9. Lo mismo puede decirse cuando se ponen 5, pero para no violar las leyes debe ser:

a = 4 → b = 7 → c = 12

a = 5 → b = 8 → c = 15

a = 6 → b = 9 → c = 18

a = 7 → b = 12 → c = 21

a = 8 → b = 15 → c = 24

Siguiendo podemos construir una tabla como la que sigue para "a" desde 1 a 90:

| a | b | c | a | b | c | a | b | c |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 31 | 58 | 93 | 61 | 102 | 183 |
| 2 | 3 | 6 | 32 | 59 | 96 | 62 | 105 | 186 |
| 3 | 6 | 9 | 33 | 60 | 99 | 63 | 108 | 189 |
| 4 | 7 | 12 | 34 | 61 | 102 | 64 | 111 | 192 |
| 5 | 8 | 15 | 35 | 62 | 105 | 65 | 114 | 195 |
| 6 | 9 | 18 | 36 | 63 | 108 | 66 | 117 | 198 |
| 7 | 12 | 21 | 37 | 64 | 111 | 67 | 120 | 201 |
| 8 | 15 | 24 | 38 | 65 | 114 | 68 | 123 | 204 |
| 9 | 18 | 27 | 39 | 66 | 117 | 69 | 126 | 207 |
| 10 | 19 | 30 | 40 | 67 | 120 | 70 | 129 | 210 |
| 11 | 20 | 33 | 41 | 68 | 123 | 71 | 132 | 213 |
| 12 | 21 | 36 | 42 | 69 | 126 | 72 | 135 | 216 |
| 13 | 22 | 39 | 43 | 70 | 129 | 73 | 138 | 219 |
| 14 | 23 | 42 | 44 | 71 | 132 | 74 | 141 | 222 |
| 15 | 24 | 45 | 45 | 72 | 135 | 75 | 144 | 225 |
| 16 | 25 | 48 | 46 | 73 | 138 | 76 | 147 | 228 |
| 17 | 26 | 51 | 47 | 74 | 141 | 77 | 150 | 231 |
| 18 | 27 | 54 | 48 | 75 | 144 | 78 | 153 | 234 |
| 19 | 30 | 57 | 49 | 76 | 147 | 79 | 156 | 237 |
| 20 | 33 | 60 | 50 | 77 | 150 | 80 | 159 | 240 |
| 21 | 36 | 63 | 51 | 78 | 153 | 81 | 162 | 243 |
| 22 | 39 | 66 | 52 | 79 | 156 | 82 | 163 | 246 |
| 23 | 42 | 69 | 53 | 80 | 159 | 83 | 164 | 249 |
| 24 | 45 | 72 | 54 | 81 | 162 | 84 | 165 | 252 |
| 25 | 48 | 75 | 55 | 84 | 165 | 85 | 166 | 255 |
| 26 | 51 | 78 | 56 | 87 | 168 | 86 | 167 | 258 |
| 27 | 54 | 81 | 57 | 90 | 171 | 87 | 168 | 261 |
| 28 | 55 | 84 | 58 | 93 | 174 | 88 | 169 | 264 |
| 29 | 56 | 87 | 59 | 96 | 177 | 89 | 170 | 267 |
| 30 | 57 | 90 | 60 | 99 | 180 | 90 | 171 | 270 |

Mirando la tabla con cuidado encontramos indicios de **patrones**. Rigurosamente todo se puede demostrar por inducción completa. La demostración es relativamente delicada y la evitamos. Vamos a usar * como símbolo de multiplicación.

Primera observación:

Entre a =3 y a = 6 entonces b crece de 1 en 1. {$3 = 3^1$ y $6 = 2 * 3^1$}.

Entre a = 9 y a = 18 entonces b crece de 1 en 1. {$9 = 3^2$ y $18 = 2 * 3^2$}.

Entre a = 27 y a = 54 entonces b crece de 1 en 1. {$27 = 3^3$ y $54 = 2 * 3^3$}.

Esto nos induce a proponer:

**Patrón 1:**

**Para todo n, entre a = $3^n$ y a = $2*3^n$ entonces b crece de 1 en 1.**

Segunda observación:

Entre a =6 y a = 9 entonces b crece de 3 en 3. {$6 = 2 * 3^1$ y $9 = 3^2$}.

Entre a = 18 y a = 27 entonces b crece de 3 en 3. {$18 = 2 * 3^2$ y $27 = 3^3$}.

Entre a = 54 y a = 81 entonces b crece de 3 en 3. {$54 = 2 * 3^3$ y $81 = 3^4$}.

Esto nos induce a proponer:

**Patrón 2:**

**Para todo n, entre $a = 2*3^n$ y $a = 3^{n+1}$ entonces b crece de 3 en 3.**

Tercera observación:

Cuando a = 3 → b = 6, cuando a = 9 → b = 18, cuando a = 27 → b= 54....

**Patrón 3:**

**Para todo n, si $a = 3^n$, entonces $b = 2*a = 2*3^n$**

Cuarta observación:

Cuando a = 6 → b = 9, cuando a = 18 → b = 27, cuando a = 54 → b= 81, ...

**Patrón 4:**

**Para todo n, si $a = 2*3^n$, entonces $b = 3*3^n = 3^{n+1}$**

Quinta observación:

Como consecuencia de los patrones 1 y 3 obtenemos

**Patrón 5:**

**Para todo n, si $3^n < a < 2*3^n$ , entonces: $b = 2*3^n + (a - 3^n) = a + 3^n$**

Sexta observación:

Como consecuencia del patrones 2 y 4 obtenemos

**Patrón 6:**

**Para todo n, si $2*3^n < a < 3^{n+1}$, entonces: $b = 3*3^n + 3*(a - 2 * 3^n) = 3 (a + 3^n)$**

Ahora pasamos a calcular cuánto es "b" si a = 1000.

Vemos que 1000 se encuentra en el intervalo que va de $3^6 = 729$ hasta $2*3^6 = 1458$. Entonces todo cae en el **patrón 5** con n = 6. En consecuencia:

$$b = a + 3^n = 1000 + 3^6 = 1000 + 729 = 1729$$

Con lo que ¡¡¡PODRÍAMOS HABER HEREDADO LA CAJA DE PIT-ERRAFÍN!!! Claro, excepto que hubiera alguien que calculara más rápido que nosotros.