PLEGADO DE PAPEL: UN RECURSO (POTENTE) MÁS PARA LA CLASE DE MATEMÁTICA

Autoras: Adriana Rabino y Patricia Cuello

(Este documento ha sido armado en base al texto de Alton T.: Olson *Mathematics Through Paper Folding.* 1975) [1]

> *Si los docentes de matemática y maestros tuvieran que elegir el principio más importante para el aprendizaje de las matemáticas probablemente hagan alusión a las "experiencias matemáticas activas".* (Alton T. Olson - Universidad de Alberta - Edmonton, Alberta. 1938)

El **plegado de papel**, como el lápiz y papel o el Geogebra u otro software, es un buen recurso para lograr experiencias matemáticas activas promoviendo la conjetura, la exploración, la prueba, la formulación de argumentos informales, la visualización espacial y el seguimiento de instrucciones.
Cuando el estudiante manipula el material y redescubre propiedades (ya sea postulados o teoremas) las mismas cobran significado para él, lo que allana el camino hacia la comprensión de los conceptos ya que los mismos no son impuestos desde "afuera".

Como muestra A. Olson, se pueden realizar prácticamente todas las construcciones geométricas con plegados de papel. Ahora bien, sabemos que en el sistema axiomático con el cual trabajamos en nuestras clases de matemática (aunque sea en forma implícita) existen entes primitivos, axiomas o postulados (que se toman como verdaderos), definiciones y teoremas (éstos últimos necesitan ser demostrados para aceptar su veracidad). En esta propuesta se han seleccionado una serie de construcciones (que representan ya sea axiomas o teoremas) a través del plegado de papel. Según el nivel de escolaridad en que se trabaje la misma, presentada la conjetura de ciertas propiedades, se realizará la demostración correspondiente (geométrica o algebraica).
Estas actividades son óptimas para realizarse bajo la modalidad de **taller**.

Recursos: Elementos de geometría, tijera, lápiz y goma, lápices de color, papel de calcar.

Actividades

[1] Libro que fue revisado y editado en 1975 por Donovan Johnson's "Paper Folding for the Mathematics Class" (ED 077 711). Comienza con instrucciones para doblar construcciones básicas como una línea recta, la línea perpendicular a una línea determinada que pasa por un punto determinado y la bisectriz de un ángulo. Los capítulos siguientes cubren conceptos relacionados con reflexiones, relaciones circulares, construcciones de estrellas y polígonos, simetría, secciones cónicas, álgebra mediante plegado de papel, polígonos construidos escribiendo nudos de papel y recreaciones como la tira de Moebius y los dodecaedros emergentes. Los apéndices enumeran teoremas que se pueden demostrar doblando papel y muestran figuras a gran escala relacionadas con algunas construcciones. (SD) (Ver traducción y adaptación de A. Rabino en new.gpdmatematica.ar/recursos).

Queda a criterio del docente utilizar las actividades que se proponen de tal manera que cumplan sus propósitos y en el nivel que crea conveniente.
Por abuso de lenguaje, muchas veces nos referimos a rectas en el papel cuando en la realidad son segmentos (dado que son acotados). Esta limitación se debe al uso de material concreto, pero tomamos como válido hablar de rectas.
Proponemos presentar las actividades sin el título para que los estudiantes conjeturen y redescubran el concepto a tratar.
Después de cada actividad, en cursiva, damos sugerencias de preguntas, comentarios y/o demostraciones que sirvan como guía para el docente.
Al finalizar de cada clase, debe quedar registrada la propiedad y/o definición que surge de cada actividad.
Es conveniente utilizar papel de calcar con bordes irregulares para que los estudiantes no aprovechen los bordes rectos para simplificar las construcciones.

EJEMPLOS DE ACTIVIDADES DE GEOMETRÍA USANDO PLEGADO PARA LOS NIVELES PRIMARIO Y SECUNDARIO

LUGARES GEOMÉTRICOS[2]

1. PLEGANDO RECTAS

En una hoja de papel (preferentemente de calcar) y utilizando el plegado:

a. Trazar una recta.
b. Trazar una recta a través de un punto dado.
c. Trazar una recta por dos puntos dados.
d. Trazar una recta perpendicular a una recta dada.
e. Trazar una recta perpendicular a una recta dada que pase por un punto fuera de ésta.
f. Trazar dos rectas paralelas.
g. Trazar una recta paralela a una recta dada que pase por un punto dado.

b. ¿Cuántas rectas se pueden trazar? Escribir una conclusión.
c. Trazar otra. ¿Es posible? ¿Qué conclusión se puede sacar?
e. Trazar otra. ¿Es posible? ¿Qué conclusión se puede sacar?
f. Justificar la construcción para que sean paralelas (construir perpendiculares en forma sucesiva).
g. Trazar otra. ¿Es posible? ¿Qué conclusión se puede sacar?

[2] Un lugar geométrico: es el conjunto de puntos que cumplen una determinada propiedad. Por ejemplo: el lugar geométrico de los puntos del plano que están a la misma distancia de un punto fijo es un círculo y el lugar geométrico de los puntos del espacio que están a la misma distancia de un punto fijo es una esfera.

2. LA MEDIATRIZ DE UN SEGMENTO

Dado un segmento AB (trazarlo con plegado), plegar el papel de tal manera que los puntos extremos del segmento AB coincidan. ¿Qué características tiene la recta CD obtenida por el plegado como lugar geométrico?

¿Cómo es la distancia entre cualquier punto de CD y los extremos de AB? Verificar la respuesta plegando el papel. La recta CD es el lugar geométrico de los puntos equidistantes de los extremos A y B.

3. LA BISECTRIZ DE UN ÁNGULO

Plegar un ángulo ABC cualquiera en un papel.
Dividir el ángulo en dos partes iguales utilizando un doblez. ¿Qué características tiene esta recta como lugar geométrico?

¿Cuál es la distancia entre cualquier punto de esa recta a los lados del ángulo? Verificar la respuesta plegando el papel.

4. LA UBICACIÓN DE PUNTOS A LA MISMA DISTANCIA A LO LARGO DE UNA RECTA

Trazar una recta. Establecer una longitud conveniente como unidad de longitud plegando la recta sobre sí misma. Repetir el procedimiento reiteradas veces marcando los puntos sobre la recta hacia adelante o hacia atrás.

Si se marcan los dobleces de los pliegues que determinan los puntos equidistantes, ¿qué características tienen esas rectas? (Paralelas)
Suponiendo que no se establezca una unidad predeterminada, buscar otro camino para resolver esta situación.

CONCEPTOS GEOMÉTRICOS RELACIONADOS CON LAS REFLEXIONES[3] ILUSTRADOS A TRAVÉS DEL PLEGADO DE PAPEL

1. LA INTERSECCIÓN DE LAS BISECTRICES DE UN TRIÁNGULO

Plegar las bisectrices de cada ángulo de un triángulo cualquiera. ¿Qué se observa?

¿Se intersecan las bisectrices en un punto en común? Prueba con otros triángulos diferentes al dado. Ese punto se denomina incentro. *¿Por qué se llamará así? ¿Cómo se ubica ese punto respecto a los lados del triángulo? Justificar con plegado.*

2. LA INTERSECCIÓN DE LAS MEDIATRICES DE LOS LADOS DE UN TRIÁNGULO

Plegar las mediatrices de cada lado de un triángulo acutángulo dado. ¿Qué se observa?

Las mediatrices se cortan en un punto.? *¿Cómo se ubica ese punto respecto a los vértices del triángulo? Verificar con plegado. Este punto se denomina* circuncentro. ¿Por qué se llamará así?

¿Qué sucede con este punto si el triángulo no es acutángulo?

3. LA INTERSECCIÓN DE LAS MEDIANAS DE UN TRIÁNGULO

Plegar segmentos desde el punto medio de cada lado hasta el vértice opuesto de un triángulo. ¿Cómo se intersecan estos segmentos?
¿Cómo está ubicado este punto respecto a los extremos de cada segmento?

Este punto se llama baricentro. *Verificar, a través de plegados, que el baricentro divide a cada una de las medianas en la relación 1/3: 2/3.*

[3] Se llama isometrías de una figura a las transformaciones que no alteran la forma ni el tamaño de la figura sobre la que se aplica; solo pueden cambiarla de posición (orientación o el sentido de esta). Ellas son las rotaciones, translaciones reflexiones o simetrías. Consideramos una reflexión aquella transformación isométrica, aplicada a una figura geométrica, que invierten los puntos y figuras del plano produciendo el efecto de un espejo. Esta reflexión puede ser respecto a un punto o a una recta.

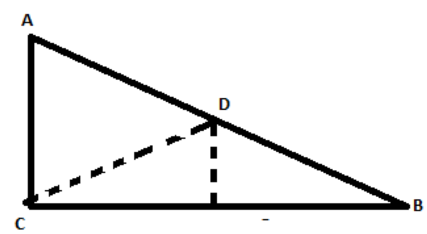
4. LA INTERSECCIÓN DE LAS ALTURAS DE UN TRIÁNGULO

Plegar las alturas de cada lado de un triángulo acutángulo cualquiera.
¿Se intersecan en un mismo punto?
¿Puedes trazar las alturas de cualquier triángulo? Prueba con otros triángulos obtusángulos y rectángulos. ¿Qué estrategias hay que utilizar en estos casos para su trazado?

El punto de intersección de las alturas se denomina ortocentro. Averigua por qué se denomina así*. El ortocentro no siempre es interior al triángulo.*

5. EL PUNTO MEDIO DE LA HIPOTENUSA DE UN TRIÁNGULO RECTÁNGULO

a. Dibujar un triángulo rectángulo ACB cualquiera (rectángulo en C).
b. Encontrar el punto medio D de la hipotenusa AB a través de un plegado. Plegar la línea desde el punto medio D a C.
c. Comparar CD y BD plegando la bisectriz del ángulo BDC. ¿Cuál es la imagen de CD a través de una reflexión respecto de esta bisectriz?



A través del plegado se infiere la siguiente ***propiedad****: La medida de la mediana de la hipotenusa en un triángulo rectángulo es igual a la medida de la mitad de la hipotenusa.*

6. DIAGONALES DE UN PARALELOGRAMO

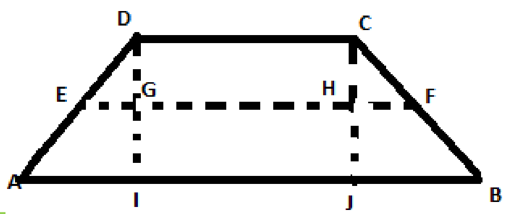
Determinar un paralelogramo a través de plegados. Plegar sus diagonales.
Comparar sus longitudes y ver cómo se intersecan.

Las diagonales de un paralelogramo no son siempre iguales. ¿Qué sucede si el paralelogramo es un rectángulo, o un cuadrado, o un rombo?

7. LA MEDIANA DE UN TRAPECIO

Plegar las alturas en ambos extremos de la base menor del trapecio ABCD. Bisecar cada lado no paralelo y unir estos puntos medios con un pliegue EF. Comparar DG y CH con GI y HJ respectivamente, al plegar a lo largo de EF.
Plegar líneas perpendiculares a AB que pasen por E y F.

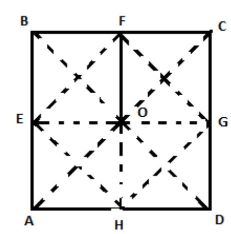
a. Nombrar todos los pares de segmentos congruentes.
b. ¿Qué relación existe entre EF (base media del trapecio) y las dos bases del mismo?



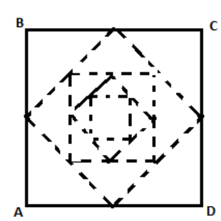
*Se desea que los estudiantes, comparando las medidas de los segmentos determinados, concluyan la siguiente **propiedad:** El segmento que unen los puntos medios de los lados no paralelos de un trapecio es paralelo a las bases y su medida es la mitad de la suma de las medidas de las mismas.*

8. RELACIONES EN EL CUADRADO DERIVADAS DE REFLEXIONES

Encontrar los puntos medios de los lados del cuadrado ABCD a través de plegados. Plegar las diagonales AC y BD. Plegar todas las líneas posibles determinadas por los puntos medios E, F, G y H (ver la figura). Mostrar (utilizando plegado) la relación que existe entre las áreas del cuadrado ABCD y el cuadrado inscripto DFGH.



Si el área del cuadrado original ABCD es de 1 u, ¿cuáles son las áreas de los otros cuadrados formados al plegar las esquinas hacia el centro?



¿Qué relación hay entre las áreas consecutivas de mayor a menor?

Las áreas de los sucesivos cuadrados de mayor a menor constituyen una sucesión de razón un medio: 1, 1/2, 1/4, 1/8m, ….

PROPIEDADES DE TRIÁNGULOS

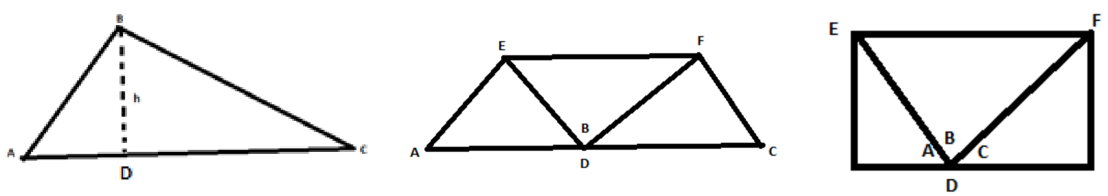
1. BASE MEDIA DE UN TRIÁNGULO

Plegar una línea a través de los puntos medios de dos lados de un triángulo cualquiera. Plegar la altura respecto al tercer lado. Comparar este lado con la línea trazada a través de los puntos medios utilizando plegado. Sacar conclusiones.

¿Cómo se llamará este segmento?
Verificar si las conclusiones son las mismas para las otras bases medias.

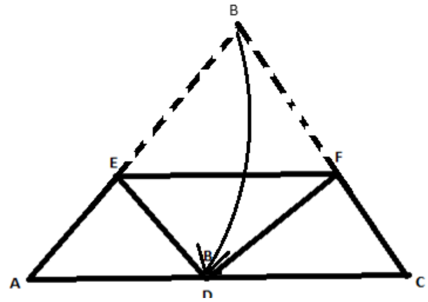
2. SUMA DE LOS ÁNGULOS INTERIORES DE UN TRIÁNGULO

a. Trazar y recortar un triángulo ABC. Plegar una de las alturas de modo que sea interior al triángulo.
b. Plegar el vértice (extremo de la altura) sobre el pie de la misma D. ¿Cómo es la línea EF respecto de la línea AC? ¿Por qué? (ver figura).
c. Plegar los vértices de los ángulos de la base A y C sobre D. ¿Qué se puede conjeturar acerca de la suma de los ángulos A + B + C?



Importante: *El plegado de papel nos permite hacer conjeturas, pero para asegurarnos de la veracidad de la misma, se requiere una demostración formal.*
Haremos la ***demostración formal*** *de esta propiedad.*
Al plegar el vértice B sobre D, el segmento EF es base media del triángulo (EF es mediatriz de BD), por lo tanto, por AC es paralela a EF porque ambos segmentos son perpendiculares a BD.

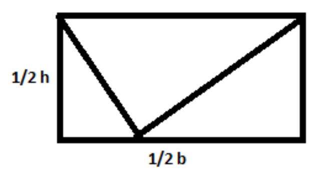
Centrándonos en el triángulo ABD (la demostración para BDC es análoga),
BEO = EOD (por simetría axial respecto de EF)
⇨ ***<EBO = < EDO***
AE = EB (por base media)
EB = ED (por simetría)
Por lo tanto, AE = DE (por carácter transitivo)
⇨ *El triángulo AED es isósceles, entonces el*
< ***EAD = <EDA****.*



Análogamente, para BDC.
Además <B = <EDO + <ODF
Por lo tanto <ADE (<A) + (<EDO + <ODF) (<B) + <FDC (<C) = 2 rectos (180º)
O sea <A + <B + <C = 2R

3. EL ÁREA DE UN TRIÁNGULO

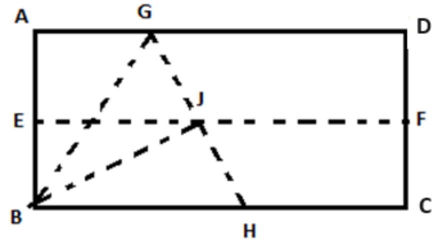
En la figura del problema anterior la forma rectangular tiene lados cuyas medidas son ½ de la base ac del triángulo ABC y ½ de la altura BD. ¿Cuál es el área del rectángulo? ¿Cómo están relacionadas las áreas de este rectángulo con el triángulo original?
¿Cuál es el área del triángulo?



Utilizar el plegado del problema anterior para verificar que las partes coinciden exactamente, entonces el área de ese rectángulo es ¼.a.b. Por lo tanto, el área del triángulo sería el doble o sea ½a.b.
El área de cualquier triángulo es igual a la mitad del producto de las medidas de cualquiera de sus bases y la altura correspondiente

4. TRIÁNGULO EQUILÁTERO

Dado un trozo de papel de calcar de forma rectangular (ABCD):
Plegar la base media EF del rectángulo ABCD.
b. Plegar el vértice A sobre EF de tal manera que el doblez resultante GB, pase a través de B.
Asignar como J la posición de A sobre EF.
Volver a la posición original desdoblando.
Plegar la línea GJ extendiéndola hasta BC (H).
Queda determinado el triángulo BGH.

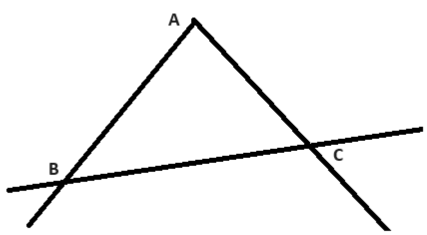


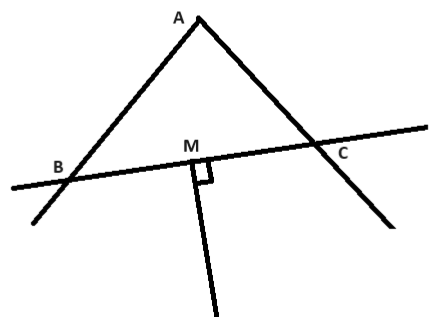
c. Trazando mediatrices, bisectrices, alturas o medianas del triángulo BGH comprobar que es equilátero.

Si bien a través del plegado, se puede verificar que los tres lados son congruentes, se quiere que los estudiantes re-descubran y usen las propiedades de los lugares geométricos respecto del triángulo equilátero.

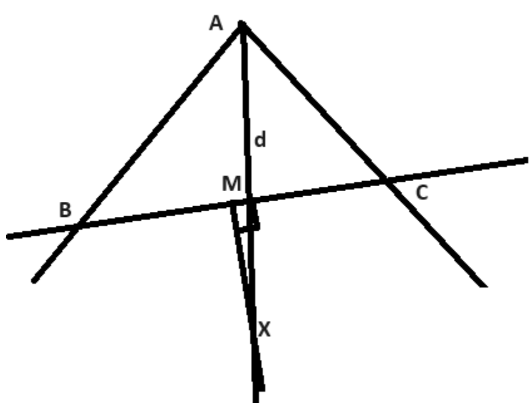
5. PROBAR QUE CUALQUIER TRIÁNGULO ES ISÓSCELES (¿¿¿QUÉEEE???)

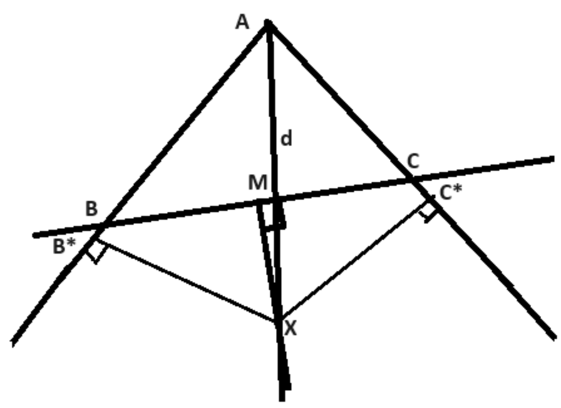
Seguir el siguiente razonamiento:
Voy a demostrar que todo triángulo es equilátero.
Empiezo dibujando un triángulo cualquiera ABC, trazando tres líneas que se cortan. Trazo la mediatriz del lado BC y el punto de intersección lo denomino M. Esto significa que todos los puntos de la mediatriz equidistan de A y de B (por propiedad).



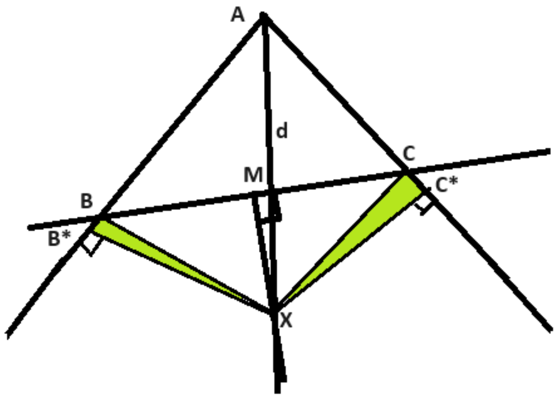


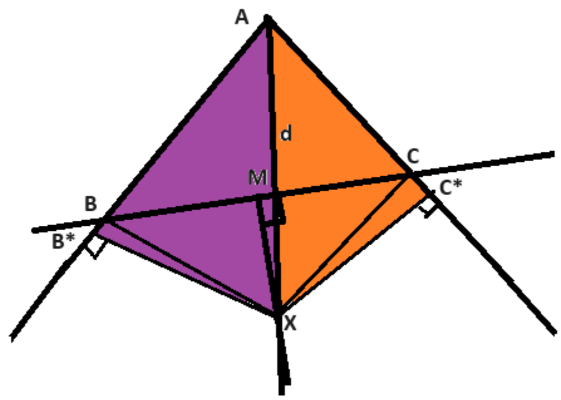
Voy a dibujar la bisectriz del ángulo A (d). Todos sus puntos equidistan de AB y de AC (por propiedad).
Llamo X al punto de intersección de la bisectriz con la mediatriz. Este punto X está a la misma distancia de B y de C por pertenecer a la mediatriz.
Ahora trazo la menor distancia de X a AB (B) y a AC (C*). Estas dos distancias son iguales porque están en la bisectriz del ángulo A.*





*Los triángulos BB*X y CC*X son congruentes (2 pares de lados congruentes y 1 par de ángulos congruentes, siendo el ángulo opuesto al lado mayor, o sea a la hipotenusa).*
*Entonces B*BX ~ CC*X => BB* ~ CC*.*





*También se tiene que el triángulo AB*X ~ AC*X por simetría axial respecto de AX => AB* ~ AC* => AB* - BB* = AB y AC* - CC* = AC*
Como AB = AC*y BB* = CC* entonces AB = AC => ABC es isósceles.*

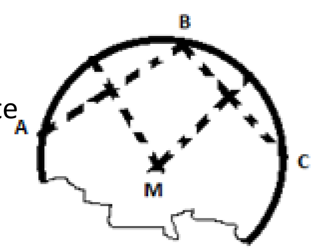
Si se repite este procedimiento tomando otro par de lados se demuestra que ABC es equilátero.

Evidentemente esto no es cierto.
*Buscar, en este razonamiento, el o los pasos incorrectos. Ayudarse con plegado de papel.
¿Qué debería ocurrir para que este razonamiento sea correcto?

<u>RELACIONES CORRESPONDIENTES AL CÍRCULO MOSTRADAS CON PLEGADO DE PAPEL</u>

1. ENCONTRAR EL CENTRO DE UN CÍRCULO CUANDO SE TIENE UNA PORCIÓN DEL MISMO QUE INCLUYE EL CENTRO

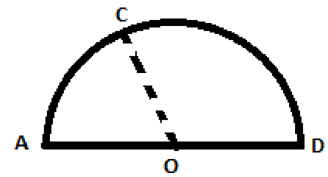
Dibujar un círculo con algún elemento circular (no con compás) y cortarle un pedazo, dejando más de la mitad del círculo.
Plegar una cuerda AB y una cuerda BC (no necesariamente iguales ni formando un ángulo recto).
Plegar las mediatrices de ambas cuerdas y llamar M al punto de intersección.
Justificar porque M resulta ser el centro del círculo.

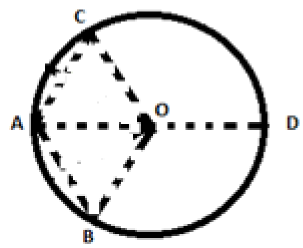


Por propiedad de mediatrices, el punto M es equidistante de A, B y C.
Tres puntos no alineados determinan un único círculo. Además, al estar esos tres puntos a la misma distancia de un punto fijo (M), ese punto resulta ser el centro del círculo (por definición de lugar geométrico de circunferencia).

2. CUERDAS Y ARCOS IGUALES EN EL MISMO CÍRCULO

Trazar un círculo. Localizar el centro O del círculo al plegar dos diámetros. Plegar el círculo a lo largo del diámetro AD.
Desde algún punto C, plegar el círculo a lo largo de CO. Marca el punto B simétrico de C.
Se determinan dos radios, CO y BO.
¿Cómo son entre sí los arcos, las cuerdas y los ángulos centrales que se forman? Verificar con plegado.

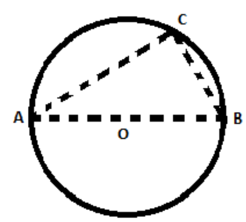




Teniendo un círculo completo, otra forma de encontrar su centro es plegando dos diámetros. Se verifica, por simetría axial, que arcos congruentes determinan cuerdas y ángulos centrales congruentes.

3. ÁNGULO INSCRIPTO EN UN SEMICÍRCULO

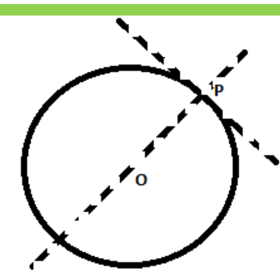
Dado un círculo en papel de calcar, plegar el diámetro AB.
Elegir un punto cualquiera sobre una de las semicircunferencias (C).
Plegar las cuerdas AC y CB. ¿Cómo es el ángulo ACB? Verificar con plegado.



Prolongando las cuerdas y por plegado se puede comprobar que las mismas son perpendiculares, por lo tanto, el ángulo ACB es recto.
Es importante que los estudiantes relacionen la medida del ángulo inscripto que determinan las cuerdas y que resulta siempre la mitad del central correspondiente (propiedad de los ángulos inscriptos en una circunferencia).

4. LA TANGENTE DE UN CÍRCULO EN UN PUNTO DADO DE SU CIRCUNFERENCIA

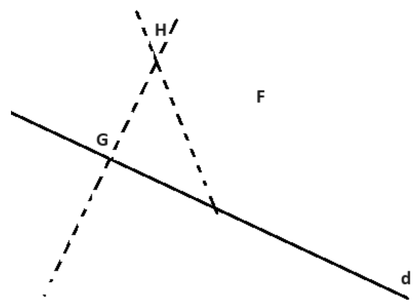
Dibujar un círculo. Plegar un diámetro del mismo y llamar P a la intersección con la circunferencia.
En P, plegar la línea perpendicular al diámetro.
¿Qué posición relativa tiene esta recta perpendicular con respecto al círculo? Justificar.



La recta tangente a un círculo interseca a éste en un único punto. Si existiera otro, la recta sería secante. ***Propiedad:*** *La tangente de una circunferencia es perpendicular al radio que pasa por el punto de intersección de la misma con la circunferencia.*

5. SECCIONES CÓNICAS: LA PARÁBOLA

Trazar con plegado cualquier recta d que llamaremos directriz. Marcar un punto F fuera de la recta, que será el foco. Plegar una línea cualquiera perpendicular a d. Marcar el punto de intersección de d y la perpendicular. Llamarlo G. Plegar el papel tal que el punto F coincida con el punto G y doblar. Llamar H al punto de intersección de este pliegue y la línea perpendicular a d. Repetir esta operación varias veces usando diferentes perpendiculares a d.
El punto H estará sobre una parábola de foco F y directriz d. Dibujar la parábola.



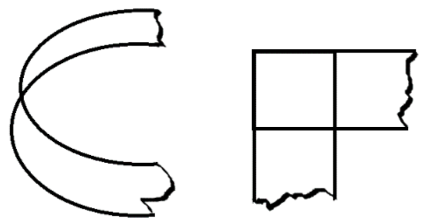
Mostrar que los dobleces formados al plegar el punto F sobre las intersecciones de las perpendiculares a d son tangentes a la parábola. Se dice que las tangentes "envuelven" a la curva parabólica.
Mediante plegado ver la relaciòn que existe entre las distancias desde cualquier punto de la parábola a la recta directriz y al foco.

En base a esta relación, definir a la parábola como lugar geométrico.

POLÍGONOS CONSTRUIDOS ATANDO NUDOS DE PAPEL

1. Cuadrado

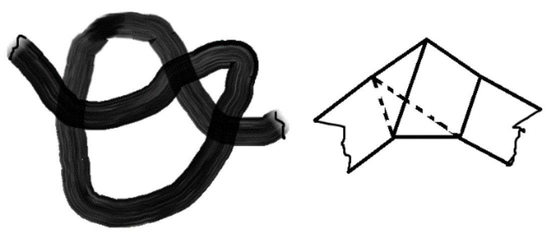
Usar dos tiras de papel del mismo ancho.



a. Plegar cada tira sobre sí misma tal que se forme un bucle y plegar. ¿Por qué los ángulos que se forman son rectos?
b. Insertar un extremo de una tira dentro del bucle de la otra tal que las tiras se entrelacen. Tirar de las tiras simultáneamente y que queden estrechas, cortar el excedente. ¿Por qué el polígono resultante es un cuadrado?

2. Pentágono

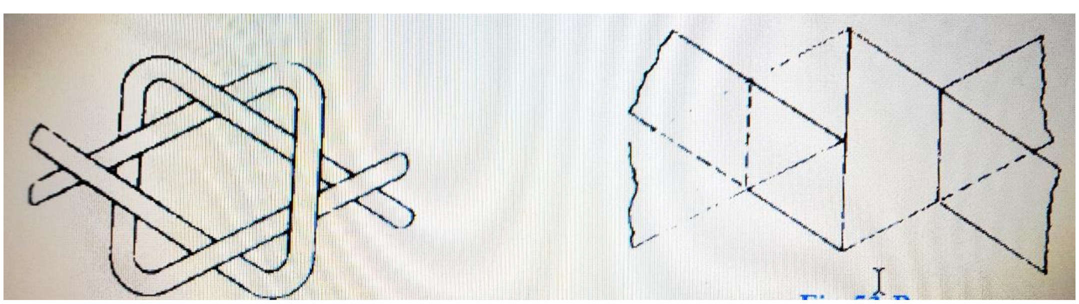
Usar una tira larga de papel de ancho constante. Hacer un nudo simple. Apretar el nudo y aplastar. Cortar los excedentes. Desdoblar y considerar el conjunto de trapezoides formados en los plegados. ¿Cuántos trapezoides se formaron? Comparar los trapezoides a través de plegados. ¿Qué conclusiones se pueden sacar sobre el pentágono obtenido?



3. Hexágono

Usar dos tiras largas de papel de igual ancho. Atar un nudo cuadrado como se muestra en la figura.

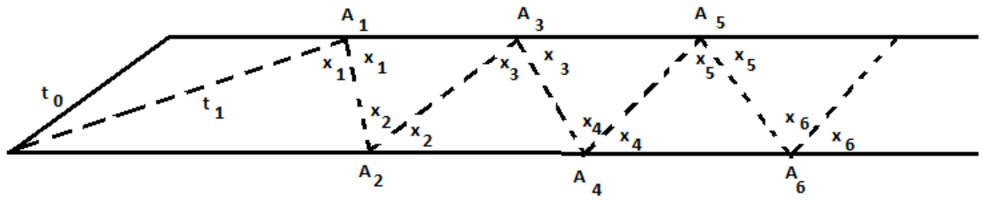
Apretar y plegar hasta que quede plano para producir un hexágono. Puede ser más fácil desatar el nudo y plegar cada pieza por separado como muestra la segunda figura. Después de apretar y aplanar, cortar las longitudes sobrantes. Desplegar y ver los trapezoides formados. ¿Cuántos trapezoides se formaron en cada tira? Comparar el tamaño de estos trapezoides.



4. Aproximaciones al ángulo de 60°

Cortar una tira de papel de 2” de ancho y aproximadamente 20” de largo. Cortar un extremo de la tira y etiquetar la línea de corte t_0. Plegando, bisecar el ángulo formado por t_0 y el borde de la tira. Etiquetar la bisectriz como t_1 y los dos ángulos congruentes formados x_0.

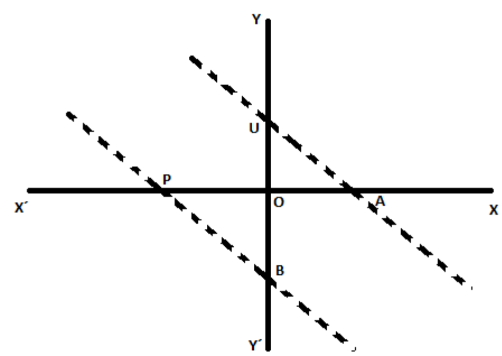
La línea t_1 intersecta el otro borde de la tira en A_1. Por plegado, bisecar el ángulo obtuso formado en A_1 por t_1 y el borde de la tira. Este proceso se continúa hasta que las longitudes de t_k y t_{k+1} son congruentes y los ángulos x_k y x_{k+1} son congruentes. Estos ángulos x_k se aproximan en medida a 60°. Es sorprendente que, no importante cuánto mida el ángulo x_0 al principio, los ángulos x_k siempre se aproximan a medir 60°.



ARITMÉTICA y ÁLGEBRA A TRAVÉS DEL PLEGADO DE PAPEL

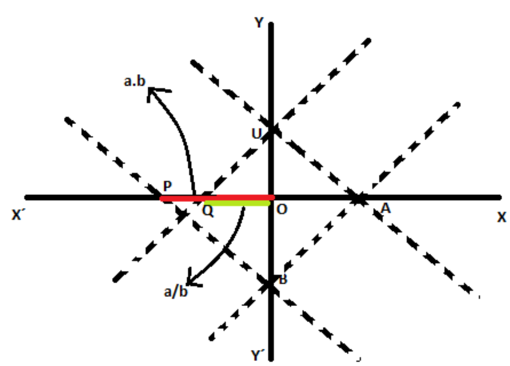
MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN ENTRE LOS NÚMEROS a Y b

Plegar dos líneas perpendiculares, X´X e Y´Y, que se intersecan en O. Marcar, utilizando el plegado, una serie de puntos sobre ambas líneas que estén a la misma distancia. Asegurarse de incluir a O entre los puntos. Estos puntos formarán un sistema de coordenadas del plano en el papel de calcar. Sea OU = +1. Definir OA y OB sobre cada eje (ver figura) como segmentos que representan a los números a y b respectivamente. Unir U con A plegando una línea a través de estos dos puntos.

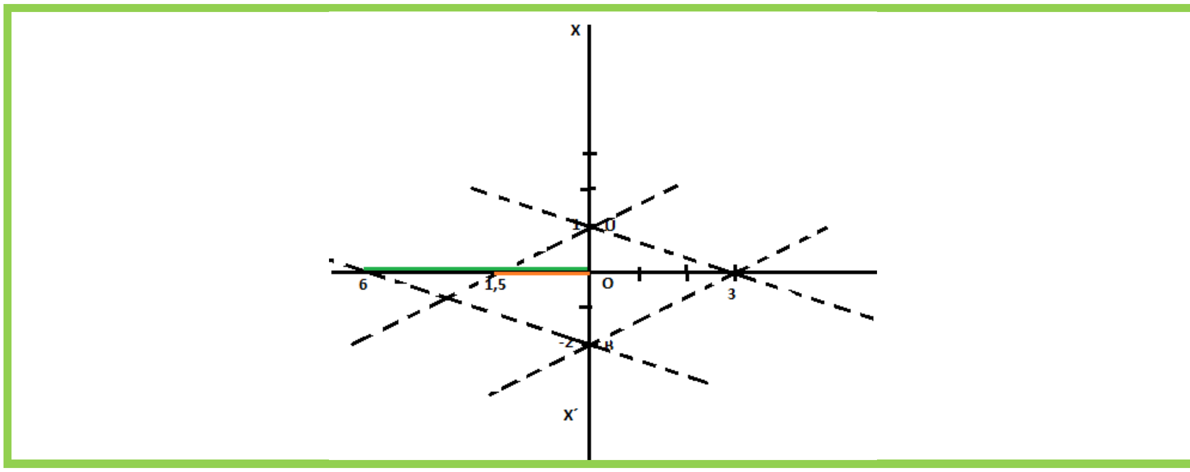


A través de B plegar una línea paralela a AU y sea P el punto de intersección de esta línea X´X. Ahora OP representa el producto de a y b en magnitud y signo. En la figura, a es positivo y b es negativo.

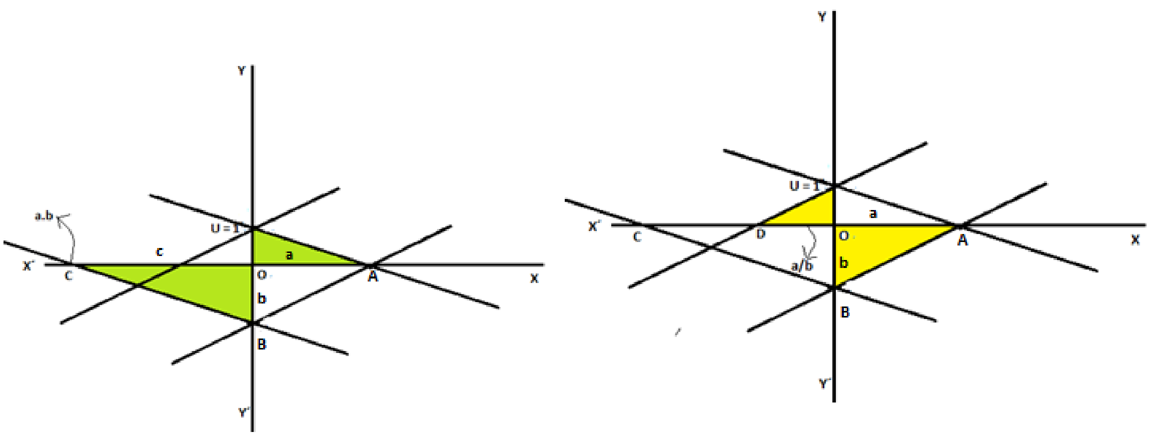
Plegar una línea que pase por A y por B. Plegar una línea que pase a través de U paralela a AB. Sea Q el punto de intersección de esta línea con X´X. Entonces OQ representa el cociente a/b en magnitud y signo.



<u>Ejemplo</u>: Sean a = 3 y b = -2



<u>Demostración</u> *(no necesariamente la única): Se muestran estas figuras de análisis como ayuda (puede haber otros).*



Utilizando la propiedad de semejanza de triángulos (los 3 ángulos congruentes) y estableciendo las proporciones correspondientes, la demostración resulta sencilla.
OA = a; OB = b; OC = c
Los triángulos UOA y BOC son semejantes pues tienen dos ángulos correspondientes congruentes por opuestos por el vértice en O y dos ángulos correspondientes congruentes por alternos internos entre paralelas (cortadas por una transversal): <UAO y <OCB. Por lo tanto, al tener los tres ángulos correspondientes congruentes (el tercero por suplementario) dichos triángulos son semejantes y por ende, sus lados son proporcionales.

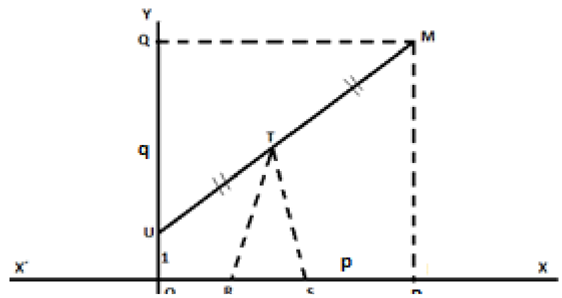
Si OB = UO (1) b entonces OC =OA.b = a.b, por lo tanto, c = a.b

Análoga a la demostración anterior.
Los triángulos DUO y AOB son semejantes. Entonces: UO (1) = BO/b, por lo tanto, DO = a/b

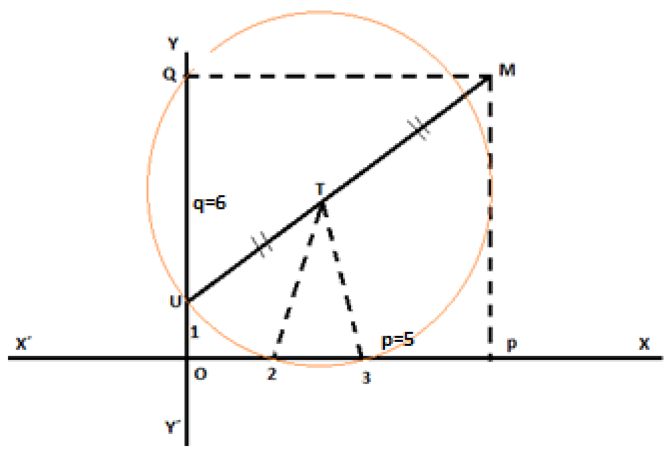
RESOLVER LA ECUACIÓN X^2 – PX + Q = 0, CON P Y Q ENTEROS

Plegar líneas perpendiculares X´X e YY´ que se intersectan en O. Plegar cada una de las líneas obteniendo puntos a igual distancia. OP y OQ representan p y q respectivamente. Plegar perpendiculares a X´X e Y´Y en P y Q, de tal manera que se intersecten en M. Plegar una línea determinada por M y U. OU es la línea que representa a (+1). Ahora encontrar el punto medio de UM a través del plegado. Sea T este punto medio. Ahora, plegando el papel a través de T, buscar que U interseque al eje XX` (es lo mismo que trazar un círculo con centro en T y radio UT y que corte al eje XX´). En el caso de la figura van a haber dos posibilidades, esto quiere decir que $x^2 - px + q = 0$ tiene dos raíces reales distintas.

Llamando a estos dos puntos R y S, entonces las medidas de OR y OS representan las raíces, tanto en magnitud como signo, de la ecuación.



El procedimiento se ilustra usando la ecuación $x^2 - 5x + 6 = 0$
Notar que OR = 2 y OS = 3 en medida.
Haciendo el plegado de TU sobre XX`, es lo mismo que imaginar un círculo a través de Q, U, R y S. ¿Cómo se puede asegurar esto?
¿Por qué OR y OS deben ser representaciones de las raíces de la ecuación? (Si las raíces no son reales, el círculo nunca interseca al eje XX´ y si tiene una raíz doble el círculo es tangente al eje XX`)



<u>Demostración (algebraica).</u> Para resolver la ecuación de 2° grado en forma algebraica $X^2 - px + q = 0$ se buscan las raíces o ceros de la ecuación a través de la fórmula de Bashkara, a saber:

$$x = \frac{p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

Entonces, basta con encontrar la ecuación del círculo, hacer la intersección con el eje de abscisas (si tiene raíces reales nos darán dos resultados) y llegar a la fórmula presentada anteriormente para demostrar que representan las raíces de la ecuación y que es la solución de $x^2 - px + q = 0$.

La ecuación del círculo es $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = r^2$, donde (x_1, y_1) es el centro del círculo.

Para hallar las coordenadas del centro, se tiene:

$X_1 = p/2$

$y_1 = \sqrt{r^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2} + 1$ *pero* $r = \frac{\sqrt{(q-1)^2 + p^2}}{2}$

Entonces:

$\boldsymbol{y_1} = \sqrt{\frac{(q-1)^2 + p^2}{4} - \frac{p^2}{4}} + 1 = \boldsymbol{\frac{q-1}{2} + 1}$

Volviendo a la ecuación del círculo y reemplazando las coordenadas del centro y el radio, se tiene:

$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{q-1}{2} - 1\right)^2 = \frac{(q-1)^2 + p^2}{4}$$

Para que intersecte el eje de abscisas el valor de y debe ser cero.

Despejando x de la ecuación, resulta:

$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{(q-1)^2 + p^2}{4} - \left(-\frac{q-1}{2} - 1\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q - 1 - 1$$

$$=> x = \pm\sqrt{\frac{p^2}{4} - q + 1 - 1} \ + \frac{p}{2} = p/2 \pm \frac{\sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

Queda así demostrado.

Otros materiales sobre plegados geométricos:

- Cundy, H. M., and A. P. Rolette. Mathematical Models. 2nd ed. London: Oxford University Press, 1961.
- Hartley, Miles C. Patterns of Polyhedrons. Chicago: The Author, 1945, (No longer in print.)
- Stewart, B. M. Adventures among the Toroid's. Oscines, Mich.: The Author, 1970.
- Barnett, I. A., "Geometrical Constructions Arising from Simple Algebraic Identities." School Science and Mathematics 38 (1938): 521-27.
- Butts, Barbara B. "Cutting Stars and Regular Polygons for Decorations." School Science and Mathematics 50 (1950): 645-49.
- Davits Chandler, and Donald Knuth. "Number Representations and Dragon Curvet; —I." Journal of Recreational Mathematics 3 (April 1970): 66-81.
- Joseph, Margaret. "Hexahexaflexagrams." Mathematics Teacher 44 (April 1951): 247-48

- Leeming, Joseph. Fun with Paper, Philadelphia: J. P. Lippincott Co., 1939.
- Pedersen, Jean J. "Some Whimsical Geometry." Mathematics Teacher 65 (October 1972): 513-21
- Row, T. Sundara. Geometric Exercises in Paper Folding. Rev. ed. Edited by W. W. Beman and D. E. Smith. Gloucester, Mass.: Peter Smith, 1958.
- Rupp, C. A. "On a Transformation by Paper Folding." American Mathematical Monthly 31 (November 1924): 432-35.
- Saupe, Ethel. "Simple Paper Models of the Conic Sections" Mathematics Teacher 48 (January 1955): 42-44.
- Uth, Carl. "Teaching Aid for Developing (a + 6) (a — 6)." Mathematics Teacher 48 (April 1955): 247-49.
- Yates, Robert C. Geometrical Tools. St. Louis: Educational Publishers, 1949. No longer in print.)

REFERENCIAS

Olson, Alton T.: Mathematics through paper folding (Matemática a través del plegado de papel). University of Alberta Edmonton, Alberta. Universidad de Alberta, Edmonton. Paper. 1938. Traducción del original y adaptación de Adriana Rabino en https://new.gpdmatematica.ar/category/recursos-para-el-aula/problemas-para/secundaria/

Publicado por ^DiAmOnD^ | *Falacias geométricas 1.* 29 junio, 2009| Demostraciones, Geometría 1| | https://www.gaussianos.com/falacias-geometricas-i/ (Ver Isoscelosis)

Preguntas y respuestas de ciencia en español. www.i-ciencias.com

Carlo H. Séquin. Video: Todos los triángulos son equiláteros. Numberphile. https://www.youtube.com/watch?v=Yajonhixy4g